Mathematik

Darstellend-geometrische Behandlung der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu **Bonn**

von

Helmut Schröder

aus Hagen i. W.

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig

1937

Berichterstatter: Professor Dr. E. A. Weiss
Mitberichterstatter: Professor Dr. H. Beck

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Teil.

Ableitung der projektiven Verallgemeinerung der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation aus der Geometrie der Punktepaare.

§ 1. Verallgemeinerung der Sylvesterschen Erzeugung des linearen Komplexes 4
§ 2. Biachsiale Korrelationen 6
§ 3. Abbildung des linearen Komplexes auf die geordneten Punktepaare einer biachsialen Korrelation K 9
§ 4. Abbildung der Punktepaare der ausgezeichneten windschiefen Involution J 12
§ 5. Abbildung der Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung auf die Punkte eines Kegels 2. Ordnung 16
§ 6. Abbildung der biachsialen Korrelation K auf eine Verwandtschaft zwischen zwei Kegeln 2. Ordnung 20
§ 7. Konstruktion der Korrelation K^* im R_4 21
§ 8. Das Bild der Kegelverwandtschaft K^* im Kugelraum 22
§ 9. Abbildung des Linienraumes auf den Kugelraum 23

II. Teil.

Konstruktion der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation.

§ 10. Abbildung der Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene (synthetisch) 28
§ 11. Abbildung der Punktepaare einer projektiven Spiegelung der Ebene auf das ebene Punktfeld 34
§ 12. Abbildung der Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J des Linienraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft V der Zeichenebene (synthetisch) 37

Seite

III. Teil.

Analytische Behandlung der Konstruktion.

§ 13. Abbildung der Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene (analytisch) 41

§ 14. Abbildung der Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J des Linienraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft V der Zeichenebene (analytisch) 45

Einleitung.

Die Euklidische Geraden-Kugel-Transformation wurde bekanntlich von S. Lie entdeckt. Ihre Nicht-Euklidische Verallgemeinerung behandelte — ohne den Zusammenhang mit den Lieschen Untersuchungen zu kennen — als erster F. Schur, später auch Lie selbst[1]), indem er sie durch Zusammensetzung der Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation mit der Transformation von Darboux herleitete. Von den vielen anderen Geometern, die sich mit der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation befaßt haben, nennen wir hier nur E. Duporcq, M. Fouché, R. Bricard, H. Liebmann, vor allem aber H. Beck[2]) und E. Study[3]).

E. Müller hat die projektive Verallgemeinerung der Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation mit den Methoden der Darstellenden Geometrie behandelt[4]). Er geht dabei aus von einem regulären linearen Geradenkomplex (Grundkomplex), der nach Sylvester durch zwei in verschiedenen Ebenen E_1 und E_2 gelegene projektive Geradenbüschel mit einer gemeinsamen, sich selbst entsprechenden Geraden $\mathfrak{P}$ erzeugt ist; bei dieser Erzeugung fällt be-

---

[1]) E. A. Weiss, Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. Deutsche Mathematik **1**, 1936.

[2]) H. Beck, Die beiden Geraden-Kugel-Transformationen von Sophus Lie. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1917. Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum. Math. Zeitschr. 15, 1922.

[3]) E. Study, Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln. Math. Ann. 86—91, 1922—1924.

[4]) E. Müller, Vorlesungen über Darstellende Geometrie. I. Bd.: Die linearen Abbildungen. Bearbeitet von E. Kruppa. Leipzig u. Wien 1923. 4. Kap.

kanntlich die im Komplex enthaltene singuläre lineare Kongruenz mit der Leitgeraden $\mathfrak{P}$ aus. Eine Komplexgerade allgemeiner Lage schneidet aber die Ebenen E_1 und E_2 in Punkten, die auf entsprechenden Geraden der beiden projektiven Geradenbüschel liegen.

Die Ebenen E_1 und E_2 werden nun von einem Punkte allgemeiner Lage aus auf eine dritte Ebene projiziert, die wir Zeichenebene nennen wollen. Bei dieser Projektion liefern die erzeugenden Geradenbüschel der beiden Ebenen in der Zeichenebene zwei perspektive Geradenbüschel. Die beiden Spurpunkte einer Komplexgeraden in den Ebenen E_1 und E_2 werden dabei auf zwei Punkte der Zeichenebene projiziert, die auf entsprechenden Geraden der perspektiven Geradenbüschel liegen. Ein Punktepaar dieser Art soll ein durch die Perspektivität der Geradenbüschel gebundenes, geordnetes Punktepaar heißen. Durch die Projektion der erzeugenden Geradenbüschel auf die Zeichenebene werden also die Geraden des Grundkomplexes auf die durch zwei perspektive Geradenbüschel gebundenen, geordneten Punktepaare der Zeichenebene abgebildet; und zwar mit Ausnahme der Geraden der ausgezeichneten singulären Kongruenz umkehrbar eindeutig[5]).

Mit Hilfe des allgemeinen Zweibilderprinzips[6]) läßt sich nun aber auch der Punktraum auf die gebundenen geordneten Punktepaare der mit zwei perspektiven Geradenbüscheln begabten Zeichenebene umkehrbar eindeutig abbilden. Das geschieht so: Den abzubildenden Raumpunkt projiziert man von zwei verschiedenen Zentren Z_1 und Z_2 aus auf Punkte zweier verschiedener Ebenen E_1 und E_2 und diese von einem dritten Zentrum Z aus auf die Zeichenebene.

Es lassen sich also sowohl die Geraden des Grundkomplexes als auch die Punkte des Raumes auf die gebundenen, geordneten Punktepaare der mit zwei perspektiven Geradenbüscheln begabten Zeichenebene abbilden. E. Müller zeigt nun, daß die Zusammensetzung dieser beiden Abbildungen die projektive Verallgemeinerung

---

[5]) E. Müller a. a. O. S. 99—100.
[6]) E. Müller a. a. O. S. 125.

der zur Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation gehörigen Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum liefert[7]).

Die Nicht-Euklidische Verallgemeinerung dieser Konstruktion ist das Ziel der vorliegenden Arbeit[8]). Zuerst wird die Möglichkeit einer bestimmten Konstruktion dargetan; dann wird die Konstruktion selbst angegeben. Es wird sich demnach darum handeln, sowohl den linearen Komplex als auch den Punktraum auf ein gewisses System von ∞^3 geordneten Punktepaaren der Zeichenebene derart abzubilden, daß die Zusammensetzung dieser beiden Abbildungen auf die zur projektiven Verallgemeinerung der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation gehörige Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum führt. Dabei tritt im Linienraum an die Stelle der Sylvesterschen Erzeugung des linearen Komplexes eine Verallgemeinerung; im Kugelraum werden die beiden projizierenden Geradenbündel der Projektionszentren Z_1 und Z_2 durch zwei singuläre lineare Kongruenzen ersetzt. Wir finden dann schließlich diejenige Konstruktion der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation wieder, die W. Brach[9]) im Zusammenhang mit Überlegungen aus der Komplexen Geometrie angegeben hat. Doch ist unsere Ableitung dieser Konstruktion neu und von den Gedankengängen der zitierten Dissertation unabhängig.

---

[7]) E. Müller a. a. O. S. 277—284.

[8]) Die Ausartungen der Konstruktion, die sich für die Abbildungen von L. Euler und H. Stähelin ergeben, untersuchte E. A. Weiss, Darstellendgeometrische Behandlung der Transformationen von L. Euler und H. Stähelin, Monatshefte f. Math. u. Phys. **45**, 1936, S. 92—103.

[9]) W. Brach, Systematische Begründung der Lieschen Abbildung der komplexen Ebene und Ableitung der Geraden-Kugel-Transformation aus der Geometrie der komplexen Ebene. Diss. Bonn 1937.

I. Teil.

Ableitung der projektiven Verallgemeinerung der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation aus der Geometrie der Punktepaare.

§ 1.

Verallgemeinerung der Sylvesterschen Erzeugung des linearen Komplexes.

Vorgegeben seien ein regulärer linearer Geradenkomplex (Grundkomplex) sowie zwei Ebenen E_1 und E_2, deren Schnittgerade $\mathfrak{P}$ dem Komplex nicht angehört. Die zu der Schnittgeraden $\mathfrak{P}$ in bezug auf das Nullsystem des vorgegebenen linearen Komplexes nullpolare Gerade $\mathfrak{Q}$ schneide die Ebenen E_1 und E_2 in den Punkten Q_1 und Q_2. Q_1 und E_1 sowie Q_2 und E_2 stehen zueinander in der Beziehung von Nullpunkt und Nullebene. Denn die beiden Geradenbüschel der Ebenen E_1 und E_2 mit den Scheiteln Q_1 und Q_2 bestehen aus lauter Komplex- oder Nullgeraden; ihre Geraden sind ja gemeinsame Treffgeraden der beiden nullpolaren Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$.

Jedem Punkte X der Ebene E_1 ordnet das Nullsystem eine Nullebene N zu, die die Ebene E_2 in einer Geraden $\mathfrak{N}_2$ schneidet. So entsteht zwischen den Ebenen E_1 und E_2 eine Korrelation, die einem Punkte X der ersten Ebene eine Gerade $\mathfrak{N}_2$ der zweiten Ebene zuordnet. Die Nullebene E_1 des Punktes Q_1 schneidet die Ebene E_2 in der Geraden $\mathfrak{P}$. Die Nullebene eines Punktes P der Schnittgeraden $\mathfrak{P}$ wird von den Nullgeraden PQ_1 und PQ_2 bestimmt; sie schneidet die Ebene E_2 in der Geraden PQ_2. Durchläuft ein Punkt X die Nullgerade PQ_1, so dreht sich seine Nullebene N um diese Nullgerade; die Spur $\mathfrak{N}_2$ der Nullebene N in der Ebene E_2,

die Bildgerade des Punktes X, durchläuft demnach das Büschel mit dem Scheitel P. Also:

Satz 1: Durch das Nullsystem des Grundkomplexes entsteht eine Korrelation zwischen den Ebenen E_1 und E_2 mit der besonderen Eigenschaft, einem jeden Punkte P der Schnittgeraden $\mathfrak{P}$, aufgefaßt als Punkt von E_1, die Gerade PQ_2, aufgefaßt als Punkt von E_1, die Gerade PQ_1 zuzuordnen.

Die Umkehrung dieses Satzes liefert eine Verallgemeinerung der Sylvesterschen Erzeugung des linearen Komplexes:

Satz 2: Die Ebene E_1 sei auf die Ebene E_2 durch eine reguläre Korrelation so bezogen, daß die Punkte ihrer Schnittachse $\mathfrak{P}$ in bezug auf die Korrelation zu sich selbst konjugiert[10]*) sind, so daß also einem Punkte P der Schnittachse $\mathfrak{P}$ sowohl in der Ebene E_1 als auch in der Ebene E_2 eine durch den Punkt P laufende Gerade entspricht. Dann erzeugen die Verbindungsgeraden konjugierter Punkte einen regulären linearen Komplex.*

Beweis: Eine Ebene allgemeiner Lage schneidet die Ebenen E_1 und E_2 in zwei Geraden, deren Punktreihen durch die Korrelation perspektiv aufeinander bezogen sind; denn ihr Schnittpunkt entspricht sich als Punkt der Achse $\mathfrak{P}$ selbst. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte laufen demnach durch einen Punkt, und dieser wird der Nullpunkt der Ebene. Das Erzeugnis der ∞^3 Verbindungsgeraden konjugierter Punkte der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist also ein linearer Komplex. Er ist regulär, weil der Treffgeradenkomplex einer Geraden zwei durch $\mathfrak{P}$ perspektiv aufeinander bezogene Büschel der beiden Ebenen liefern würde.

Durch die in Satz 2 angegebene Erzeugung des linearen Komplexes wird in jeder der beiden Ebenen E_1 und E_2 ein Geradenbüschel ausgezeichnet. Die durch die Korrelation der Schnittgeraden $\mathfrak{P}$ zugeordneten Punkte Q_1 (in der Ebene E_1) und Q_2 (in der Ebene E_2) sind die Scheitel dieser Geradenbüschel. Ferner sind

[10]) Ein Punkt Y soll zu einem Punkte X bezüglich der Korrelation konjugiert heißen, wenn Y auf der Geraden $\mathfrak{N}_2$ liegt, die die Korrelation dem Punkte X zuordnet.

die Punkte Q_1 und Q_2 die Nullpunkte der Ebenen E_1 und E_2, und ihre Verbindungsgerade $\mathfrak{Q} = Q_1 Q_2$ wird die Nullpolare der Geraden $\mathfrak{P}$.

Bei der Erzeugung werden alle die Nullgeraden, die die Schnittgerade $\mathfrak{P}$ — und dann auch die dazu nullpolare $\mathfrak{Q}$ — treffen, die Ebenen E_1 und E_2 also in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, nicht geliefert. Anders als im Falle der Sylvesterschen Erzeugung, bei der eine schwerer zu beschreibende singuläre Kongruenz ausfällt, läßt sich demnach hier die ausfallende Kongruenz als die der gemeinsamen Treffgeraden der beiden zueinander nullpolaren Achsen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ leicht beschreiben und ergänzen.

§ 2.
Biachsiale Korrelationen.

Wir projizieren jetzt von einem Punkte Z allgemeiner Lage aus die Ebenen E_1 und E_2 auf eine dritte Ebene, die Zeichenebene, die ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit nur der Einfachheit der Zeichnung wegen mit der einen Ebene E_1 zusammenfallen möge. Die korrelative Beziehung zwischen den Ebenen E_1 und E_2 geht dann in eine korrelative Beziehung der Zeichenebene über. Diese Korrelation gehört einem besonderen Typus an, den wir „biachsial" nennen und zunächst unabhängig von der Abbildung untersuchen wollen.

Jede ebene Korrelation

$$u_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

besitzt mit der kontragredienten Korrelation

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}\, u_k \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

zwei Inzidenzkurven, die Kurve 2. Ordnung:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik}\, x_i x_k = 0\,. \tag{3}$$

und die Kurve zweiter Klasse:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} A_{ik}\, u_i u_k = 0. \tag{4}$$

Im Falle der Polarität fallen diese beiden Inzidenzkurven zusammen.

Als biachsiale Korrelation bezeichnen wir nun eine solche, deren Inzidenzkurve 2. Ordnung in ein Geradenpaar zerfällt.

Für diejenigen biachsialen Korrelationen, deren Inzidenzkurve 2. Ordnung in das Geradenpaar g, h:

$$x_1 x_2 = 0 \tag{5}$$

zerfällt, muß sein:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0; \quad a_{32} = -a_{23}; \quad a_{31} = -a_{13}. \tag{6}$$

Die Parameterdarstellung aller ∞^3 biachsialen Korrelationen, die das genannte Geradenpaar als Inzidenzkurve besitzen, lautet daher:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' = \quad + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ u_2' = + a_{21} x_1 \quad + a_{23} x_3, \\ u_3' = - a_{13} x_1 - a_{23} x_2 \quad . \end{array}\right. \tag{7}$$

Die Determinante einer solchen Korrelation setzen wir als von Null verschieden voraus:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = -a_{13} a_{23} (a_{12} + a_{21}) \neq 0. \tag{8}$$

Die zu der biachsialen Korrelation (7) kontragrediente Korrelation hat zur Inzidenzkurve die in ein Punktepaar zerfallende Kurve 2. Klasse:

$$(a_{23} u_1 - a_{13} u_2 - a_{21} u_3) \cdot (a_{23} u_1 - a_{13} u_2 + a_{12} u_3) = 0, \tag{9}$$

deren Punkte p und q wegen (8) voneinander verschieden sind. Ihre Verbindungsgerade $pq = a_{13} : a_{23} : 0$ läuft durch den Scheitel $gh = 0:0:1$ des Geradenpaares g, h der Inzidenzkurve $x_1 x_2 = 0$. Die biachsiale Korrelation (7) transformiert ihre ausgezeichneten Punkte und Geraden folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
p &= a_{23} : -a_{13} : -a_{21} \to g = 1 : 0 : 0 ,\\
q &= a_{23} : -a_{13} : a_{12} \to h = 0 : 1 : 0 ,\\
gh &= 0 : 0 : 1 \to pq = a_{13} : a_{23} : 0 ,\\
g &= 1 : 0 : 0 \to q = a_{23} : -a_{13} : a_{12} ,\\
h &= 0 : 1 : 0 \to p = a_{23} : -a_{13} : -a_{21} ,\\
pq &= a_{13} : a_{23} : 0 \to gh = 0 : 0 : 1 ,
\end{aligned}
$$

Für jedes andere von $x_1 x_2 = 0$ verschiedene Geradenpaar g, h gilt die analoge Untersuchung; sie ist der hier gemachten projektiv äquivalent. Deshalb können wir unser Ergebnis gleich allgemein formulieren:

Satz 3: Zerfällt die Inzidenzkurve 2. Ordnung einer (regulären) Korrelation in ein Paar verschiedener Geraden g, h, so zerfällt ihre Inzidenzkurve 2. Klasse in ein Paar verschiedener Punkte p, q; und zwar läuft die Gerade pq des Punktepaares durch den Scheitel gh des Geradenpaares. Den „Zentren" p und q werden die „Achsen" g und h zugeordnet.

Den ∞^4 Geradenpaaren der Ebene und den ∞^3 Punktepaaren entsprechend, die man dann auf einer Geraden durch den Scheitel eines solchen Paares annehmen kann, gibt es $\infty^3 \cdot \infty^4 = \infty^7$ biachsiale Korrelationen.

Eine Konstruktion der biachsialen Korrelation läßt sich bei vorgegebenen Inzidenzkurven leicht ableiten: Zwei Geraden g und h seien als Achsen, zwei Punkte p und q seien als Zentren der Korrelation vorgegeben; und das Punktepaar p, q sei so angenommen, daß seine Gerade pq durch den Scheitel gh des Geradenpaares g, h läuft. Durch diese Figur ist eine biachsiale Korrelation vollständig bestimmt, sobald noch festgesetzt ist, daß dem Zentrum p die Achse g und dem Zentrum q die Achse h entsprechen soll[11]). Einer Geraden durch das Zentrum p ordnet die Korrelation dann nämlich ihren Schnittpunkt mit der Achse g

[11]) So gehören immer zwei biachsiale Korrelationen mit den gleichen Inzidenzkurven zusammen. Die zur Korrelation (7) gehörige ergibt sich, wenn man a_{12} und $-a_{21}$ miteinander vertauscht.

und einer Geraden durch das Zentrum q ihren Schnittpunkt mit der Achse h zu. Daraus folgt:

Satz 4: Die biachsiale Korrelation mit den Achsen g, h und den entsprechend zugeordneten Zentren p, q läßt sich folgendermaßen konstruieren: Den abzubildenden Punkt x — $(pqx) \neq 0$ — verbindet man mit den Zentren p, q; die Verbindungsgeraden xp, xq schneiden die Achsen g, h in den Punkten $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$; die Verbindungsgerade $\bar{x}\bar{\bar{x}}$ der Punkte $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ liefert dann die Bildgerade u' des Punktes x.

Dabei wird insbesondere ein Punkt x der Achse g (h) auf seine mit ihm inzidente Verbindungsgerade xq (xp) mit dem Zentrum q (p) abgebildet. Dem Zentrum p bzw. q entspricht die Achse g bzw. h. Dem Schnittpunkt gh entspricht die Gerade pq. Ein Punkt x allgemeiner Lage der Geraden pq wird daher in die Gerade u' des Büschels gh transformiert, die mit den Geraden g, h, pq dasselbe Doppelverhältnis bildet wie ihr Ursprungspunkt x mit den Punkten p, q, gh.

Zum Zwecke späterer Verwendung (III, § 14) geben wir noch die Gleichungen der speziellen biachsialen Korrelation mit den Achsen $g = 1:0:0$, $h = 1:1:0$ und den entsprechend zugeordneten Zentren $p = 1:0:1$, $q = 1:0:0$ an:

(10) $$u_1' = x_1, \quad u_2' = x_1 - x_3, \quad u_3' = x_2.$$

§ 3.

Abbildung des linearen Komplexes auf die geordneten Punktepaare einer biachsialen Korrelation K.

Wir kehren nun zu dem Gedankengang am Beginn des vorigen Paragraphen zurück. Durch die Wahl des Projektionszentrums Z wird auch die Nullebene N des Punktes Z ausgezeichnet. Sie schneide die Ebenen E_1, E_2 in den Geraden $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$. (Vgl. hierzu und zu dem Folgenden Abb. 1.) Der Schnittpunkt dieser Spuren $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ liegt auf der Geraden $\mathfrak{P}$; wir bezeichnen ihn mit R'. R sei der Schnittpunkt der Nullebene N mit der Geraden $\mathfrak{Q}$. Die Verbin-

dungsgerade RZ der Punkte R und Z ist eine Nullgerade. Sie muß daher, weil sie die Gerade $\mathfrak{Q}$ trifft, auch die Gerade $\mathfrak{P}$ schneiden, d. h. die Gerade RZ läuft durch den Punkt R'. Die Gerade $\mathfrak{Q}$ wird demnach auf die Gerade Q_1R' und daher der Punkt Q_2 als Punkt der Geraden $\mathfrak{Q}$ auf einen Punkt Q_2' der Geraden Q_1R' projiziert. *Projiziert man also die Figur der verallgemeinerten Sylvesterschen Erzeugung des regulären linearen Komplexes von einem Punkte Z allgemeiner Lage aus auf die Ebene E_1 als Zeichenebene, so werden in dieser Ebene zwei Geraden und zwei Punkte ausgezeichnet: die Gerade $\mathfrak{P}$ und die Spur $\mathfrak{N}_1$ der Nullebene N des Projektionszentrums Z (zugleich Projektion der Spur $\mathfrak{N}_2$ der Nullebene N in der Ebene E_2), sowie die Projektionen Q_1 und Q_2' der beiden Spurpunkte Q_1 und Q_2 der Geraden $\mathfrak{Q}$ in den Ebenen E_1 und E_2. Die Verbindungsgerade Q_1Q_2' läuft durch den Schnittpunkt R' der Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}_1$.*

Vermöge der Projektion entspricht der Korrelation zwischen den Ebenen E_1 und E_2 eine Korrelation K der Zeichenebene mit der besonderen Eigenschaft, jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{P}$ eine durch ihn hindurchlaufende Gerade, nämlich seine Verbindungsgerade mit dem ausgezeichneten Punkte Q_2' zuzuordnen: Einem Punkte X der Zeichenebene entspricht in der Korrelation K die Projektion der Schnittgeraden seiner Nullebene mit der Ebene E_2 auf die Zeichenebene.

Wie jede Korrelation besitzt auch die Korrelation K der Zeichenebene eine Inzidenzkurve 2. Ordnung und eine Inzidenzkurve 2. Klasse. Die Gerade $\mathfrak{P}$ ist nach dem Gesagten sicher ein Teil der Inzidenzkurve 2. Ordnung. Diese zerfällt infolgedessen in ein Geradenpaar, d. h. die Korrelation K ist biachsial.

Die zweite Gerade der Inzidenzkurve 2. Ordnung ist die ausgezeichnete Gerade $\mathfrak{N}_1$. In der Tat: Die Nullebene eines Punktes X_1 der Geraden $\mathfrak{N}_1$ ist die Ebene X_1Q_1Z (vgl. Abb. 1). Ihre Spur in der Ebene E_2 läuft durch den Spurpunkt X_2 der Nullgeraden X_1Z auf der Geraden $\mathfrak{N}_2$ (und durch den Schnittpunkt Q_1' der Geraden Q_1Z mit der Ebene E_2). Die Projektion dieser Spur läuft durch den Punkt X_1, die Projektion des Punktes X_2. Dem Punkte X_1

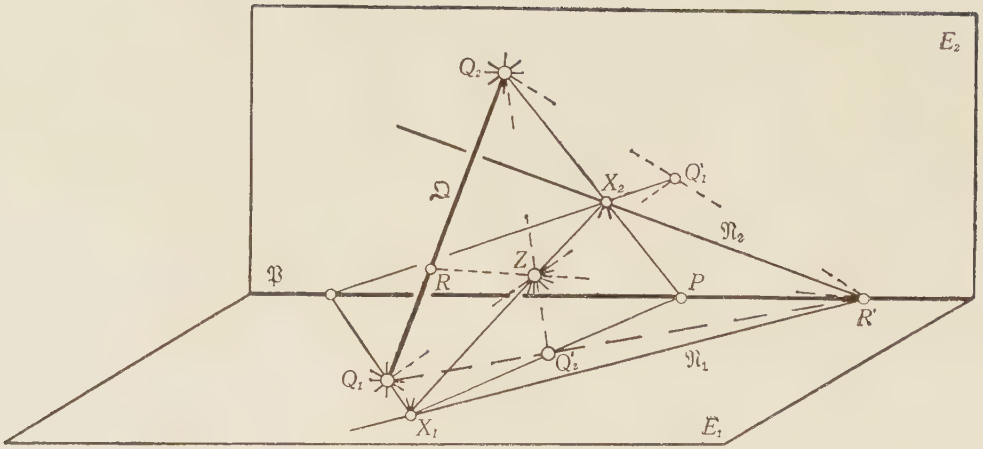
E_2
Q_2
$\mathfrak{Q}$
X_2
Q_1'
$\mathfrak{N}_2$
$\mathfrak{P}$
Z
R
P
R'
Q_2'
$\mathfrak{N}_1$
Q_1
X_1
E_1

Abbildung 1.

der ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{N}_1$ wird also durch die Korrelation K eine durch den Punkt X_1 und auch durch den Punkt Q_1 hindurchlaufende Gerade zugeordnet.

Satz 5: Durch die Projektion auf die Zeichenebene entsteht aus der durch ein Nullsystem hervorgehenden Korrelation zwischen den Ebenen E_1 und E_2 eine biachsiale Korrelation K der Zeichenebene. Die beiden Achsen der Korrelation K sind die ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}_1$ der Zeichenebene. Die Inzidenzkurve 2. Klasse der Korrelation K zerfällt in das Punktepaar Q_1, Q_2'. Dem Punkte Q_1 wird die Gerade $\mathfrak{P}$ und dem Punkte Q_2' die Gerade $\mathfrak{N}_1$ zugeordnet.

Wir können schließlich unser erstes Hauptresultat folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 6: Die Geraden eines regulären linearen Komplexes können auf die geordneten Punktepaare einer biachsialen Korrelation abgebildet werden; und zwar nach Ausschluß einer ausgezeichneten regulären linearen Kongruenz[12]*) umkehrbar eindeutig.*

§ 4.

Abbildung der Punktepaare der ausgezeichneten windschiefen Involution J.

Im Nicht-Euklidischen Falle der Geraden-Kugel-Transformation werden die Geraden eines regulären linearen Komplexes bekanntlich nicht umkehrbar eindeutig auf die Punkte des Raumes abgebildet. Vielmehr entsprechen einem Punkte des Punktraumes zwei Geraden des linearen Komplexes, die sich in einer durch zwei zueinander nullpolare Geraden bestimmten windschiefen Involution entsprechen; diese Geraden fallen zusammen, wenn sie gemeinsame Treffgeraden der beiden Achsen der windschiefen Involution sind.

Als ausgezeichnete Kongruenz von Komplexgeraden wählen wir bei der Abbildung des in § 1 konstruierten Grundkomplexes die

---

[12]) Es handelt sich um die Kongruenz mit den Achsen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$.

Kongruenz mit den zueinander nullpolaren Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ als Achsen. Bei der windschiefen Involution J an den Achsen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bleibt der lineare Komplex selbst als Ganzes in Ruhe. Diese Involution J induziert in den Ebenen E_1 und E_2 je eine projektive Spiegelung, welche jedesmal die Gerade $\mathfrak{P}$ als Achse und den Punkt Q_1 bzw. Q_2 als Zentrum hat. Daher werden zwei Punkten X_1, X_2 der Ebenen E_1, E_2, die in bezug auf die durch das Nullsystem des linearen Komplexes vermittelte Korrelation K zwischen den Ebenen E_1 und E_2 konjugiert sind, durch die beiden projektiven Spiegelungen in den Ebenen E_1 und E_2 zwei Punkte $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ zugeordnet, die ebenfalls in der Korrelation K konjugiert sind. Bei der Projektion der beiden Ebenen E_1 und E_2 liefern die beiden projektiven Spiegelungen dieser beiden Ebenen zwei projektive Spiegelungen in der Zeichenebene: Die projektive Spiegelung P_1 mit der Achse $\mathfrak{P}$ und dem Zentrum Q_1 und die projektive Spiegelung P_2 mit der Achse $\mathfrak{P}$ und dem Zentrum Q_2'. Es gilt dann:

Satz 7: Zwei verschiedene Nullgeraden $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$, *die sich in der durch die beiden Achsen* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *bestimmten windschiefen Involution* J *entsprechen, werden auf zwei Paare bezüglich der biachsialen Korrelation* K *der Zeichenebene konjugierter Punkte* X_1, X_2 *und* $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ *derart abgebildet, daß die Punktepaare* X_1, $\bar{X}_1$ *und* X_2, $\bar{X}_2$ *der projektiven Spiegelung* P_1 *bzw.* P_2 *angehören.*

Soll eine Figur des Linienraumes in den Kugelraum übertragen werden, so ist sie als Ort von Nullgeraden anzusehen. Handelt es sich insbesondere um einen Punkt X, so wird gleichzeitig mit ihm der X in der windschiefen Involution J entsprechende Punkt $\overline{X}$ abgebildet. Das Nullgeradenbüschel des Punktes X bestimmt die Nullebene von X. Diese schneidet die Ebenen E_1 und E_2 in zwei Geraden, die durch das Nullgeradenbüschel perspektiv aufeinander bezogen werden; der auf $\mathfrak{P}$ gelegene Schnittpunkt der beiden Spuren entspricht sich ja selbst. Die Projektion der beiden Geraden auf die Zeichenebene liefert zwei perspektiv aufeinander bezogene Geraden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, die sich im Punkte $O = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{P}$ schneiden. Nach Satz 7 sind entsprechende Punkte der Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ bezüglich der Korrelation K konjugiert.

Ebenso bestimmt der Punkt $\bar{X}$ ein Geradenpaar $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ in der Zeichenebene mit dem Scheitel $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = O$; die Scheitel der beiden Geradenpaare $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ fallen deswegen zusammen, weil die beiden entsprechenden Nullgeradenbüschel jedes mit der ausgezeichneten regulären Kongruenz genau eine, und zwar beide die Gerade $X\bar{X}$ gemeinsam haben.

Die ganze Figur ist in der Zeichenebene durch die beiden auf $\mathfrak{P}$ inzidenten Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ bestimmt. Einerseits gehören nämlich nach Satz 7 die Geradenpaare $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ den projektiven Spiegelungen P_1 bzw. P_2 an. Andererseits müssen sowohl die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ als auch die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ derart perspektiv aufeinander bezogen sein, daß entsprechende Punkte bezüglich der Korrelation K konjugiert sind. Um daher zu einem vorgegebenen Geradenpaare $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ das Perspektivitätszentrum X' zu finden, unterwerfen wir zwei beliebige Punkte X_1, Y_1 von $\mathfrak{G}_1$ der Korrelation K. Ihre Bildgeraden schneiden $\mathfrak{G}_2$ in zwei Punkten X_2, Y_2. Deren Verbindungslinien X_1X_2 und Y_1Y_2 mit X_1 bzw. Y_1 schneiden sich in dem Perspektivitätszentrum X'. Analog dazu findet man das Perspektivitätszentrum $\bar{X}'$ des Geradenpaares $\bar{\mathfrak{G}}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$.

Die Zentren X' und $\bar{X}'$ sind die Projektionen der Punkte X bzw. $\bar{X}$ auf die Zeichenebene. Die Verbindungslinie $X'\bar{X}'$ läuft daher durch den Scheitel O auf $\mathfrak{P}$ und schneidet die Gerade Q_1Q_2' im vierten harmonischen Punkte I' zu O in bezug auf das Punktepaar X', $\bar{X}'$.

Später werden wir die Lösung folgender Aufgabe brauchen: Auf dem Geradenpaare $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$ von P_2 sei ein Punktepaar X_1, $\bar{X}_1$ der projektiven Spiegelung P_1 gegeben. Es soll auf dem Geradenpaar $\mathfrak{G}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ von P_2 ein Punktepaar der projektiven Spiegelung P_2 gefunden werden, welches das vorgegebene zum Bildpunktquadrupel zweier einander in J entsprechender Komplexgeraden ergänzt. Wir behaupten:

Satz 8: Ein Punktepaar X_1, $\bar{X}_1$ des Geradenpaares $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$ von P_1, welches selbst der Spiegelung P_1 angehört, kann auf zwei verschiedene Weisen X_2, $\bar{X}_2$ oder Y_2, $\bar{Y}_2$ durch ein Punktepaar der

Spiegelung P_2 des Geradenpaares $\mathfrak{G}_2$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ von P_2 zum Bildpunktquadrupel eines Nullgeradenpaares der Involution J ergänzt werden.

Die Nullgeradenpaare gehören zu zwei verschiedenen Punktepaaren der Involution J, deren gegenseitige Lage im Satz 9 angegeben wird.

Beweis: Einmal bestimmen, wie eben gezeigt, die Perspektivitäten (X') und $(\overline{X}')$ zwischen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}_1$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ein Punktepaar X_2, $\overline{X}_2$ der verlangten Art. Das gewonnene Punktquadrupel ist Bild eines Nullgeradenpaares von X, $\overline{X}$. Dabei geht man von der Tatsache aus, daß $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ das Bild des Nullgeradenbüschels von X und $\overline{\mathfrak{G}}_1$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ das Bild des Nullgeradenbüschels von $\overline{X}$ ist.

Nun sind durch die Korrelation K aber auch die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ und ebenso die Geraden $\overline{\mathfrak{G}}_1$, $\mathfrak{G}_2$ projektiv und, weil der Schnittpunkt sich dabei selbst entspricht, sogar perspektiv aufeinander bezogen; die entsprechenden Perspektivitätszentren Y', $\overline{Y}'$ lassen sich ähnlich wie die Zentren X', $\overline{X}'$ der Perspektivitäten (X') bzw. $(\overline{X}')$ angeben. Daher sind $\mathfrak{G}_1$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ und $\overline{\mathfrak{G}}_1$, $\mathfrak{G}_2$ genau so wie $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ und $\overline{\mathfrak{G}}_1$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ die Bilder von zwei Nullgeradenbüscheln. Deren Scheitel Y, $\overline{Y}$ gehören auch der windschiefen Involution J an, da auch $\overline{\mathfrak{G}}_2$, $\mathfrak{G}_2$ ein Geradenpaar von P_2 ist. Die Perspektivitäten (Y') und $(\overline{Y}')$ bestimmen nun ein zweites Punktepaar Y_2, $\overline{Y}_2$ auf $\overline{\mathfrak{G}}_2$, $\mathfrak{G}_2$, so daß X_1, $\overline{X}_1$, Y_2, $\overline{Y}_2$ das Bild eines Nullgeradenpaares von Y, $\overline{Y}$ wird. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Einen tieferen Einblick in diesen Sachverhalt bietet uns eine Untersuchung über die Lage der Punktepaare X, $\overline{X}$ und Y, $\overline{Y}$ bzw. über den Zusammenhang zwischen den (Paaren der) Perspektivitäten (X'), $(\overline{X}')$ und (Y'), $(\overline{Y}')$. Wir denken uns die Bezeichnung so gewählt, daß die Nullebenen von X und Y durch die Gerade $\mathfrak{G}_1$ laufen. Da $\mathfrak{G}_2$, $\overline{\mathfrak{G}}_2$ der projektiven Spiegelung P_2 angehört, liegen diese Nullebenen harmonisch zu den beiden Ebenen, die $\mathfrak{G}_1$ mit den Geraden $\mathfrak{P}$ und OQ_2 (vgl. Abb. 1) aufspannt. Diese vier Ebenen schneiden daher die Gerade $\mathfrak{Q} = Q_1 Q_2$ in einem harmonischen Punktquadrupel Q_1, Q_2; I, L. Damit ist die Lage der Geraden $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ zueinander festgelegt. Denn I, L sind die Treffpunkte der Geraden $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ mit $\mathfrak{Q}$.

Um nun die Punkte Y, $\bar{Y}$ selbst aus den Punkten X, $\bar{X}$ zu gewinnen, beachten wir: In der Korrelation K entspricht dem Punkte $\mathfrak{G}_1\mathfrak{N}_1$ seine Verbindungsgerade mit dem Zentrum Q_1 und daher in der Perspektivität (X') bzw. (Y') deren Schnittpunkt mit $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\bar{\mathfrak{G}}_2$ (vgl. S. 14 Z. 10ff). Die Verbindungsgerade von Q_1 mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{G}_1\mathfrak{N}_1$ läuft also sowohl durch das Zentrum X' als auch durch das Zentrum Y'. Analog dazu beweist man, daß die Verbindungsgerade $X'\bar{Y}'$ der beiden anderen Zentren $\bar{X}'$, Y' durch Q_1 läuft.

Da nun sowohl X', $\bar{X}'$; O, I' als auch Y', $\bar{Y}'$; O, L' als auch Q_1, Q'_2; I', L' harmonische Punktepaare bilden, müssen die Verbindungsgeraden $X'\bar{Y}'$ und $\bar{X}'Y'$ durch den Punkt Q'_2 laufen. Also:

Satz 9: Die beiden Geradenquadrupel $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ *und* $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$, $\mathfrak{G}_2$ *stellen die Bilder von zwei Punktepaaren* X, $\bar{X}$ *und* Y, $\bar{Y}$ *der Involution* J *dar. Diese haben folgende Lage zueinander: Die Geraden* XX *und* $Y\bar{Y}$ *schneiden sich im Punkte* O *auf* $\mathfrak{P}$ *und schneiden die Gerade* $\mathfrak{Q}$ *in zwei Punkten* I, L, *die zu den Punkten* Q_1, Q_2 *harmonisch liegen. Ferner sind* Y, $\bar{Y}$ *die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden von* X, $\bar{X}$ *mit* Q_1, Q_2 *bzw.* Q_2, Q_1: $Y = (XQ_1, \bar{X}Q_2)$ *und* $\bar{Y} = (XQ_2, \bar{X}Q_1)$.

§ 5.

Abbildung der Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung auf die Punkte eines Kegels 2. Ordnung.

Als Raumelemente in den Ebenen E_1 und E_2 und dann auch in der Zeichenebene betrachten wir nun die Punktepaare der projektiven Spiegelungen. Damit fassen wir auch zwei zusammengehörige Nullgeraden $\mathfrak{X}$ und $\bar{\mathfrak{X}}$ von vornherein in einer Figur zusammen. Eine anschauliche Vorstellung von der durch die Korrelation K der Zeichenebene hervorgerufenen Verwandtschaft zwischen den Punktepaaren der beiden projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 erhalten wir durch die umkehrbar eindeutige Abbildung der projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 auf zwei Kegel 2. Ordnung.

Zur Vorbereitung für die Ableitung dieser Abbildung der Punktepaare einer projektiven Spiegelung auf die Punkte eines Kegels 2. Ordnung betrachten wir eine Involution im binären Gebiete einer Geraden. Ihre Ruhepunkte seien $1:0$ und $0:1$, so daß $\xi_1:\xi_2$ und $-\xi_1:\xi_2$ zugeordnete Punkte sind. Wir multiplizieren die linken Seiten ihrer Gleichungen miteinander:

$$(1) \qquad (\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)=\xi_1^{\,2}\eta_2^{\,2}-\xi_2^{\,2}\eta_1^{\,2}.$$

Dann zeigt sich, daß die Punktepaare der Involution (kurz: die Involution) auf die Punkte des binären Gebietes

$$(2) \qquad \zeta_1:\zeta_2=\xi_1^{\,2}:\xi_2^{\,2}$$

umkehrbar eindeutig bezogen sind; die Involution selbst ist als Ort ihrer Punktepaare ein binäres Gebiet.

Ebenso verfahren wir jetzt im Falle der projektiven Spiegelung. Ihr Zentrum sei der Punkt $1:0:0$, ihre Achse die Gerade $x_1=0$. Die projektive Spiegelung lautet dann:

$$(3) \qquad x_1':x_2':x_3'=-x_1:x_2:x_3.$$

Die Gleichung des Punktepaares x, x' bilden wir, indem wir die linken Seiten der Gleichungen der Punkte x und x' miteinander multiplizieren und das Produkt gleich Null setzen:

$$(4) \qquad \begin{cases} (u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)\cdot(-u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)= \\ =-u_1^{\,2}x_1^{\,2}+u_2^{\,2}x_2^{\,2}+u_3^{\,2}x_3^{\,2}+2u_2u_3x_2x_3=0. \end{cases}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung deuten wir jetzt als homogene Punktkoordinaten im R_3, und zwar setzen wir:

$$(5) \qquad X_0=x_2x_3, \quad X_1=-x_1^{\,2}, \quad X_2=x_2^{\,2}, \quad X_3=x_3^{\,2}.$$

Dies ist aber eine Parameterdarstellung des Kegels 2. Ordnung:

$$(6) \qquad X_0^2-X_2X_3=0.$$

Also:

Satz 10: Die Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung können auf die Punkte eines Kegels 2. Ordnung umkehrbar eindeutig abgebildet werden.

Für das Folgende ist eine Beschreibung dieser Abbildung notwendig. Wir stellen entsprechende Elemente in einer Tabelle zusammen:

Projektive Spiegelung.	Kegel 2. Ordnung.
Doppeltgezähltes Zentrum $(1:0:0)$	Kegelscheitel $(0:1:0:0)$
Achse als Ort von Doppelpunkten $(x_1 = 0)$	Hauptkegelschnitt H $(X_1 = 0, \quad X_0^2 - X_2 X_3 = 0)$
Gerade durch das Zentrum als Ort von Punktepaaren	Erzeugende des Kegels
Ein Paar spiegelbildlicher Geraden als Ort von Punktepaaren; sie schneiden sich in einem Punkte s der Achse.	Kegelschnitt, der den Hauptkegelschnitt H im Bildpunkte des Punktes s berührt.

Die letzte Gegenüberstellung bedarf einer Erklärung: Durch die projektive Spiegelung werden auch die Geraden der Ebene gepaart: Ein Paar zugeordneter Geraden g, g' ist ein Ort von Punktepaaren der projektiven Spiegelung, der von jeder Geraden durch das Zentrum in einem Punktepaare der projektiven Spiegelung geschnitten wird; die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte s der Achse. Setzt man nun in (4) bzw. (5) für x_i die Parameterdarstellung der Geraden g (und die der Geraden g') ein, die in einem binären Parameter linear ist, so ergibt sich die Parameterdarstellung eines Kegelschnitts, weil die X_i in dem binären Parameter quadratisch werden; dieser Kegelschnitt berührt den Hauptkegelschnitt H, weil die Gerade g die Achse in genau einem Punkte s schneidet (und die Gerade g' ebenso in demselben Punkte s), ihr Bildkegelschnitt den Hauptkegelschnitt also auch in genau einem Punkte trifft, w. z. b. w.

Wir können weitergehen und die Geradenpaare der projektiven Spiegelung auf die Ebenen ihrer Bildkegelschnitte, also auf die Tangentialebenen des Hauptkegelschnittes H abbilden, die eine dem Kegel duale Figur darstellen. Dabei entspricht der Achse die Ebene

des Hauptkegelschnittes H und einer Geraden durch das Zentrum eine Tangentialebene des Kegels. Wenn die Gerade g das Büschel mit dem Scheitel s durchläuft, dreht sich die Bildebene um die Tangente des Hauptkegelschnittes H im Bildpunkte von s.

Anschließend stellen wir die Frage nach der Anzahl der Konstanten, durch welche unsere Abbildung bestimmt ist. Das Schicksal des Zentrums ist bestimmt; es entspricht dem Kegelscheitel. Die Achse ist auf einen Kegelschnitt des Kegels abzubilden, dessen Ebene auf ∞^3 Weisen gewählt werden kann. Aber auch die projektive Abbildung der Doppelpunkte der Achse auf die Punkte des Kegelschnittes H ist auf ∞^3 Weisen möglich. Damit ist die Bild-Erzeugende einer Geraden durch das Zentrum ganz festgelegt. Nun ist die Abbildung der Punktepaare einer solchen Geraden auf die Punkte der entsprechenden Erzeugenden auch projektiv, wie die Betrachtung des binären Falles (vgl. S. 17) zeigte. Eine projektive Verwandtschaft ist durch das Schicksal von drei Elementen bestimmt. Auf jeder Geraden durch das Zentrum ist das Schicksal von zwei Punktepaaren bekannt, nämlich des doppelt gezählten Zentrums und des doppelt gezählten Schnittpunktes der Geraden mit der Achse. Unsere Abbildung wird dann dadurch vollständig bestimmt, daß einem Geradenpaare g, g' mit dem Scheitel s ein bestimmter, den Hauptkegelschnitt H im Bildpunkt des Scheitels s berührender Kegelschnitt G zugeordnet wird, der auf ∞^1 Weisen gewählt werden kann.

Satz 11: Die Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung können auf ∞^7 Weisen auf die Punkte eines vorgegebenen Kegels 2. Ordnung abgebildet werden[13]).

---

[13]) Der Kegel läßt ∞^7 automorphe Kollineationen zu.

§ 6.

Abbildung der biachsialen Korrelation K auf eine Verwandtschaft zwischen zwei Kegeln 2. Ordnung.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen benutzen wir jetzt und bilden die Punktepaare der beiden projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 auf die Punkte zweier Kegel K_1 und K_2 ab, deren Räume R_3 wir vorläufig als verschieden und voneinander getrennt voraussetzen; der Kegel K_1 besitze den Scheitel Q^*_1 und den Hauptkegelschnitt H_1, der Kegel K_2 den Scheitel Q^*_2 und den Hauptkegelschnitt H_2. Da die beiden projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 dieselbe Achse $\mathfrak{P}$ besitzen, sind die Hauptkegelschnitte H_1 und H_2 projektiv aufeinander bezogen; entsprechende Punkte sind Bilder eines und desselben Doppelpunktes der Achse $\mathfrak{P}$. In dieser Abbildung entspricht nach Satz 7 der Korrelation K eine Transformation, welche die Punkte des einen Kegels K_1 den Tangentialebenen des Hauptkegelschnittes H_2 des anderen Kegels K_2 umkehrbar eindeutig zuordnet. Diese Transformation K^* ist aber linear, also eine räumliche Korrelation. Denn die Korrelation K induziert eine lineare Verwandtschaft zwischen den Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse der Zeichenebene und daher auch eine lineare Verwandtschaft im Bildraum dieser Kurven; und bei unserer Abbildung werden die Punkte- und Geradenpaare der projektiven Spiegelungen als Kurven 2. Ordnung bzw. 2. Klasse aufgefaßt.

Insbesondere entsprechen bei dieser Verwandtschaft zwischen den beiden Kegeln K_1 und K_2 dem Scheitel Q^*_1 die Ebene des Hauptkegelschnittes H_2 und einem jeden Punkte des Kegelschnittes H_1 die Ebene, die den Kegelschnitt H_2 in dem entsprechenden Punkte berührt und durch den Scheitel Q^*_2 läuft.

Korrelationen dieser Art gibt es ∞^1; ebenso viele als es ebene Kollineationen gibt, die eine bestimmte Gerade punktweise und einen bestimmten Punkt geradenweise in Ruhe lassen. Sie entsprechen den ∞^1 möglichen biachsialen Korrelationen mit den Zentren Q_1, Q'_2 und mit der einen Achse $\mathfrak{P}$ der Zeichenebene und

diese wiederum den ∞^1 linearen Komplexen, welche die durch die Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bestimmte lineare Kongruenz enthalten.

Es läßt sich nun folgender Satz aussprechen:

Satz 12: Durch die Abbildung des Satzes 10 werden die Punktepaare der projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 der Zeichenebene auf die Punkte zweier Kegel 2. Ordnung K_1 und K_2 mit den projektiv aufeinander bezogenen Hauptkegelschnitten H_1 und H_2 abgebildet. Die Geradenpaare des linearen Komplexes, die sich in der Involution J entsprechen, werden bei dieser Abbildung auf die Punktepaare einer räumlichen Korrelation K^* zwischen den beiden Räumen der Kegel K_1 und K_2 abgebildet. Die Korrelation K^* ordnet die Punkte des Kegels K_1 den Tangentialebenen des Hauptkegelschnittes H_2 des Kegels K_2 derart zu, daß entsprechende Punkte der Kegelschnitte H_1 und H_2 zueinander konjugiert werden und der Scheitel Q^*_1 zu allen Punkten des Kegelschnittes H_2 konjugiert wird. — Die ∞^1 Korrelationen dieser Art entsprechen den ∞^1 linearen Komplexen des von den Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ aufgespannten Büschels.

§ 7.

Konstruktion der Korrelation K^* im R_4.

Nach Satz 11 können wir es einrichten, daß die beiden projektiven Hauptkegelschnitte H_1 und H_2 auf den Bildkegeln K_1 und K_2 der projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 zusammenfallen, und zwar so, daß sich entsprechende Punkte überdecken. Die beiden Kegel K_1 und K_2 liegen dann in einem R_4; der Scheitel des einen Kegels liege nicht in dem R_3 des anderen Kegels. Durch die Figur dieser beiden Kegel kann man ein Büschel quadratischer Mannigfaltigkeiten M_3^2 des R_4 legen. Denn man unterwirft dabei die $\infty^{14} M_3^2$ des R_4 dreizehn linearen Bedingungen: den fünf Bedingungen, den Hauptkegelschnitt $H = H_1 = H_2$ zu enthalten, den zwei Bedingungen die Kegelscheitel Q^*_1, Q^*_2 zu enthalten und den sechs $(2 \cdot 3 = 6)$ Bedingungen dafür, daß die beiden Kegelscheitel Q^*_1, Q^*_2 zu den Punkten der Ebene des Hauptkegelschnittes H konjugiert sind.

Die im Satz 12 beschriebene Verwandtschaft zwischen den Kegeln K_1 und K_2 läßt sich nun durch die Polarität einer aus dem Büschel ein für alle Male fest ausgewählten regulären M_3^2 herstellen: Einem jeden Punkte X^* des Kegels K_1 entspricht nämlich in der Polarität an der M_3^2 der Tangential-R_3 durch ihn, welcher die durch den Punkt X^* laufende Erzeugende des Kegels K_1 als Verbindungsgerade konjugierter Punkte enthält. Er schneidet daher den R_3 des Kegels K_2 in einer Ebene, die den Hauptkegelschnitt H in dessen Schnittpunkt mit der durch X^* laufenden Erzeugenden des Kegels K_1 berührt.

Der Tangential-R_3 des Scheitels Q^*_1, also der R_3 des Kegels K_1 selbst, schneidet den R_3 des Kegels K_2 in der Ebene des ausgezeichneten Kegelschnittes H. Der Tangential-R_3 eines Punktes X^* des Hauptkegelschnittes H schneidet den R_3 des Kegels K_2 in einer Tangentialebene des Kegels K_2, die durch den Punkt X^* selbst läuft. So wird jedem Punkte des Kegels K_1 eine Tangentialebene des Hauptkegelschnittes $H_1 = H_2$ des Kegels K_2 zugeordnet, wie es in Satz 12 beschrieben ist.

Den $\infty^1 M_3^2$ des Büschels durch die beiden Kegel K_1 und K_2 entsprechen die ∞^1 möglichen Korrelationen des Satzes 12.

§ 8.

Das Bild der Kegelverwandtschaft K^* im Kugelraum.

Die M_3^2 durch die beiden Kegel K_1 und K_2 denken wir uns jetzt in einem R_5 gelegen und legen durch sie eine reguläre M_4^2. Diese M_4^2 betrachten wir dann als Plückersche M_4^2 und deuten mittels der Kleinschen Abbildung des Linienraumes auf die Plückersche M_4^2 die M_3^2 durch die beiden Kegel K_1 und K_2 als Bild der Geraden eines regulären linearen Komplexes in einem neuen Raum, dem „Kugelraum". Dann entsprechen den beiden Kegeln K_1 und K_2, die den Hauptkegelschnitt $H = H_1 = H_2$ gemeinsam haben, umkehrbar eindeutig zwei singuläre lineare Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, die sich in einem ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ schneiden. Ihre Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$, die Bilder der beiden Scheitel Q^*_1 und Q^*_2, gehören dem zu $\mathfrak{h}$ kon-

jugierten Regulus $\bar{\mathfrak{h}}$ an; die Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ selbst bestehen aus den Tangenten der durch den ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ bestimmten Fläche 2. Ordnung in den Punkten der Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$.

Zwei Punkte der Kegel K_1 und K_2, die in bezug auf die Korrelation K^* zwischen den beiden Kegelräumen konjugiert sind, sind nach § 7 auch in bezug auf die Polarität an der M_3^2 konjugiert. Infolgedessen entsprechen ihnen zwei Geraden der beiden singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, die sich in einem Punkte schneiden. Ein Paar (bezüglich M_3^2) konjugierter Punkte der beiden Kegel K_1 und K_2 wird somit auf einen Punkt des Kugelraumes abgebildet. Diese Abbildung der Paare konjugierter Punkte der Kegel K_1, K_2 auf den Kugelraum ist auch umkehrbar, da durch einen Punkt allgemeiner Lage nur je eine Gerade der beiden singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ läuft. So folgt

Satz 13: Die Verwandtschaft K^* zwischen den beiden Kegeln K_1 und K_2 des R_4 wird im Kugelraum auf eine Verwandtschaft zwischen zwei singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ mit gemeinsamem Regulus $\mathfrak{h}$ umkehrbar eindeutig abgebildet. In der Verwandtschaft entsprechen einer Geraden der ersten Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ die ∞^1 mit ihr inzidenten Geraden der zweiten Kongruenz $\mathfrak{k}_2$.

Die hierbei auftretenden Singularitäten lernen wir im nächsten Paragraphen kennen.

§ 9.

Abbildung des Linienraumes auf den Kugelraum.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen haben wir zwei verschiedene Geraden des regulären linearen Komplexes (Grundkomplexes), die sich in der windschiefen Involution J an den Achsen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ des Linienraumes entsprechen, zuerst auf zwei in bezug auf die biachsiale Korrelation K konjugierte Punktepaare der projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 (§§ 3, 4), dann auf zwei in bezug auf eine bestimmte reguläre M_3^2 konjugierte Punkte der beiden Kegel K_1, K_2 (§§ 5, 6), schließlich auf zwei inzidente Geraden der beiden

singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und damit auf den Schnittpunkt dieser Geraden (§ 8) abgebildet.

Dabei wird eine jede Gerade der durch die zueinander nullpolaren Achsen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bestimmten regulären linearen Kongruenz zusammen mit den ∞^1 Geraden dieser Kongruenz, die die Achse $\mathfrak{P}$ in demselben Punkte P treffen, nacheinander auf einen Punkt der Achse $\mathfrak{P}$, einen Punkt des Hauptkegelschnittes H der beiden Kegel K_1, K_2 und endlich auf eine Gerade des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ abgebildet; ohne daß sich dadurch zunächst (vgl. Satz 16) eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den Geraden des betreffenden Geradenbüschels in der ausgezeichneten regulären linearen Kongruenz und den Punkten der entsprechenden Erzeugenden des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ ergibt.

Es soll jetzt bewiesen werden, daß die beschriebene Abbildung des Grundkomplexes auf die Punkte des Kugelraumes zur Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation führt. Dazu betrachten wir die durch den ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ bestimmte Fläche 2. Ordnung als absolute Fläche einer Cayleyschen Maßbestimmung. Dann ist zu zeigen, daß ein Punkt X allgemeiner Lage des Linienraumes als Ort seines Nullgeradenbüschels auf eine Minimalgerade des Kugelraumes, also auf eine Tangente der absoluten Fläche abgebildet wird.

Nach § 4 wird ein Punkt X des Linienraumes mit dem ihm in der Involution J entsprechenden Punkt $\bar{X}$ auf ein Geradenquadrupel $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ abgebildet. Davon gehören $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ den projektiven Spiegelungen P_1 bzw. P_2 an. Weiter sind $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ und ebenso $\bar{\mathfrak{G}}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ derart perspektiv aufeinander bezogen, daß entsprechende Punkte bezüglich der Korrelation K konjugiert sind (vgl. S. 13ff).

Nach § 5 werden die dem Geradenpaar $\mathfrak{G}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_1$ angehörigen Punktepaare der projektiven Spiegelung P_1 auf die Punkte eines Kegelschnitts G_1 auf dem Kegel K_1 und die dem Geradenpaar $\mathfrak{G}_2$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ angehörigen Punktepaare der projektiven Spiegelung P_2 auf die Punkte eines Kegelschnitts G_2 auf dem Kegel K_2 abgebildet. Die Kegelschnitte G_1 und G_2 berühren sich und den Hauptkegelschnitt H in dem Bildpunkte O^* des gemeinsamen Scheitels $O = \mathfrak{G}_1 \bar{\mathfrak{G}}_1 = \mathfrak{G}_2 \bar{\mathfrak{G}}_2$

der beiden Geradenpaare. Weiter sind die Kegelschnitte G_1 und G_2 durch die Kegelverwandtschaft K^* bzw. durch die Polarität der M_3^2 derart aufeinander bezogen, daß einem Punkte X^*_1 des Kegelschnittes G_1 die beiden Punkte X^*_2, Y^*_2 des Kegelschnittes G_2 zugeordnet werden, in denen die Bildebene des Punktes X^*_1 den Kegelschnitt G_2 schneidet. Nach Satz 8 gilt dann:

Satz 14: Einem Punkte X^*_1 des Kegelschnitts G_1 entsprechen in der Kegelverwandtschaft K^* zwei Punkte X^*_2, Y^*_2 des Kegelschnittes G_2, die beide X^*_1 zum Bildes eines Nullgeradenpaares von J ergänzen. Einer von diesen Punkten, er sei mit X^*_2 bezeichnet, ist dadurch ausgezeichnet, daß er X^*_1 zum Bild des Nullgeradenpaares von X, X ergänzt.

Der von den beiden Kegelschnitten G_1 und G_2 aufgespannte R_3 schneidet die Plückersche M_4^2 daher in einer regulären Fläche 2. Ordnung, deren beide Scharen von Erzeugenden man erhält, wenn man jeden Punkt des Kegelschnittes G_1 mit den beiden entsprechenden Punkten des Kegelschnittes G_2 verbindet. Eine Erzeugendenschar ist nach Satz 14 ausgezeichnet. Die Schnittfläche 2. Ordnung des R_3 der beiden Kegelschnitte G_1, G_2 mit der M_4^2 ist somit orientiert. Damit ist aber auch das Schnittpunktepaar der Polaren dieses R_3 mit der M_4^2 orientiert und einer seiner Punkte ausgezeichnet.

Überträgt man diesen Sachverhalt in den Kugelraum, so erhält man in den singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, den beiden Kegelschnitten G_1 und G_2 entsprechend, zwei Reguli $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, die sich und den ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ in der dem gemeinsamen Berührungspunkte O^* entsprechenden Geraden $\mathfrak{o}$ berühren. Das orientierte Schnittpunktepaar der Polaren des durch die Kegelschnitte G_1, G_2 bestimmten R_3 mit der M_4^2 ergibt zwei Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, von denen eine ausgezeichnet ist. Sie gehören den zu $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ konjugierten Regelscharen an und berühren die absolute Fläche auf der Berührungsgeraden $\mathfrak{o}$. Die Geraden der Reguli $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ schneiden sich dann sowohl in den Punkten der einen Geraden als auch in den Punkten der anderen Geraden. Dadurch werden die Reguli $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ auf zwei Weisen projektiv aufeinander bezogen, und zwar jedesmal so, daß die beiden Regelscharen gemeinsame Gerade $\mathfrak{o}$ sich

selbst entspricht. Diejenige Weise, die durch die ausgezeichnete Gerade hervorgerufen wird, entspricht der ausgezeichneten projektiven Beziehung zwischen den Kegelschnitten G_1 und G_2 durch die Kegelverwandtschaft K^*. Die in dieser projektiven Beziehung zugeordneten Geraden der Reguli $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ in den singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ schneiden sich also in den Punkten der ausgezeichneten Geraden, die eine Tangente der absoluten Fläche, d. h. eine Minimalgerade ist. Ein Nullgeradenbüschel, das nicht der ausgezeichneten regulären linearen Kongruenz mit den Leitgeraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ des Linienraumes angehört, wird also mit dem ihm in der windschiefen Involution J entsprechenden Nullgeradenbüschel auf eine Minimalgerade des Kugelraumes abgebildet. Damit ist gezeigt:

Satz 15: Durch die Abbildung (der §§ 3, 4, 5, 6, 8) des Grundkomplexes auf die Punkte des Kugelraumes werden zwei verschiedene einander in der Involution J entsprechende Punkte X, $\bar{X}$ des Linienraumes auf eine Tangente der absoluten Fläche des Kugelraumes abgebildet.

Nach dem Gesagten werden die Geraden des Nullgeradenbüschels des Punktes X mit den Geraden des Nullgeradenbüschels des Punktes $\bar{X}$, soweit sie nicht der ausgezeichneten regulären linearen Kongruenz angehören, auf die Punkte der entsprechenden Tangente mit Ausnahme des Berührungspunktes abgebildet. Aus Stetigkeitsgründen entspricht deshalb der beiden Nullgeradenbüscheln angehörigen Geraden der ausgezeichneten linearen Kongruenz der Berührungspunkt der Tangente. Daher gilt:

Satz 16: Die Geraden der ausgezeichneten regulären linearen Kongruenz mit den Leitgeraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ werden auf die Punkte der absoluten Fläche derart abgebildet, daß die Punkte der Geraden $\mathfrak{P}$ auf die Geraden des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ und die Punkte der Geraden $\mathfrak{Q}$ auf die Geraden des dazu konjugierten Regulus $\bar{\mathfrak{h}}$ abgebildet werden.

Wie jetzt weiter die Geraden allgemeiner Lage des Linienraumes auf orientierte Kugeln des Nicht-Euklidischen Raumes abgebildet werden, soll hier als bekannt vorausgesetzt und nicht weiter behandelt werden.

II. Teil.

Konstruktion der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation.

Im I. Teil haben wir die Möglichkeit einer bestimmten Konstruktion[14]) der Nicht-Euklidischen Geraden-Kugel-Transformation kennengelernt. Um die beschriebene Abbildung nun ohne den Umweg über den R_5 im R_3 unmittelbar herzustellen, müssen wir die Punkte des Kugelraumes über die beiden singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ mit den Paaren von Bildpunktepaaren der Geradenpaare des Grundkomplexes (vgl. Satz 7) und damit mit dem Grundkomplex des Linienraumes selbst in Verbindung setzen. Dazu bilden wir zunächst die Punkte des Kugelraumes mit Hilfe der linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ auf die Punktepaare einer gewissen quadratischen Verwandtschaft der Zeichenebene ab. Dann sind einerseits nach Satz 7 die Nullgeradenpaare der Involution J des Linienraumes auf gewisse Paare von Punktepaaren der projektiven Spiegelungen P_1 bzw. P_2 und andererseits die Punkte des Kugelraumes auf gewisse Punktepaare der Zeichenebene abgebildet. Daraus ergibt sich die Hauptaufgabe dieses Teiles unserer Arbeit, nämlich eine Beziehung zwischen den Bildpunktquadrupeln der Nullgeradenpaare von J des Linienraumes und den Bildpunktepaaren der Punkte des Kugelraumes herzustellen, womit die gesuchte Konstruktion abgeleitet ist. Wir lösen die Aufgabe zunächst synthetisch; die analytische Lösung holen wir im III. Teile nach.

---

[14]) Das Wort Konstruktion benutzen wir in demselben Sinne wie H. Beck in seiner Arbeit: Konstruktion der Lieschen Geraden-Kugel-Transformation (Monatshefte f. Math. u. Phys. **39**, 1932); d. h. es wird der Zusammenhang in ein und demselben Raume hergestellt.

§ 10.

Abbildung der Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene (synthetisch).

Bei der Herleitung der Konstruktion denken wir uns im Kugelraum eine reguläre Fläche 2. Ordnung als absolute Fläche vorgegeben und zeichnen eine Tangentialebene der absoluten Fläche als „Zeichenebene" aus. Die Zeichenebene schneidet den ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ selbst in einer Geraden $\mathfrak{f}$ und den dazu konjugierten Regulus $\bar{\mathfrak{h}}$ in einer Geraden $\mathfrak{p}$. Auch die Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ gehören dem konjugierten Regulus $\mathfrak{h}$ an. Ihre Spuren q_1 und q'_2 in der Zeichenebene liegen auf der Geraden $\mathfrak{f}$.

Die einfachste Methode, eine singuläre lineare Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ oder $\mathfrak{k}_2$ mit den Punkten der Zeichenebene in Beziehung zu setzen, besteht darin, ihre Geraden mit der Zeichenebene zum Schnitt zu bringen. Insbesondere werden dabei in jedem Falle die Geraden des den beiden Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ angehörigen, ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ den Punkten der Geraden $\mathfrak{p}$ zugeordnet.

Durch einen Punkt des Kugelraumes, der nicht auf einer Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ oder $\mathfrak{q}_2$ liegt, läuft aus jeder der beiden Kongruenzen genau eine Gerade. Daher wird ein Punkt des Kugelraumes vermöge seiner beiden Kongruenzgeraden auf ein geordnetes Punktepaar der Zeichenebene abgebildet. In welchem Zusammenhang stehen nun die ∞^3 den Punkten des Kugelraumes in der Abbildung entsprechenden Punktepaare der Zeichenebene?

Die Spur einer festen Geraden $\mathfrak{g}$ allgemeiner Lage der Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ sei g. Die der Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ angehörigen Treffgeraden $\mathfrak{x}$ der Geraden $\mathfrak{g}$ bilden einen Regulus. Dessen Spur in der Zeichenebene ist ein Kegelschnitt c. Die ∞^1 Punkte des Kegelschnittes c bilden mit dem Punkt g die Bildpunktepaare der Punkte der Geraden $\mathfrak{g}$. Die Bildpunktepaare der Punkte des Kugelraumes gehören also einer quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene an, die einem Punkte g einen Kegelschnitt c zuordnet.

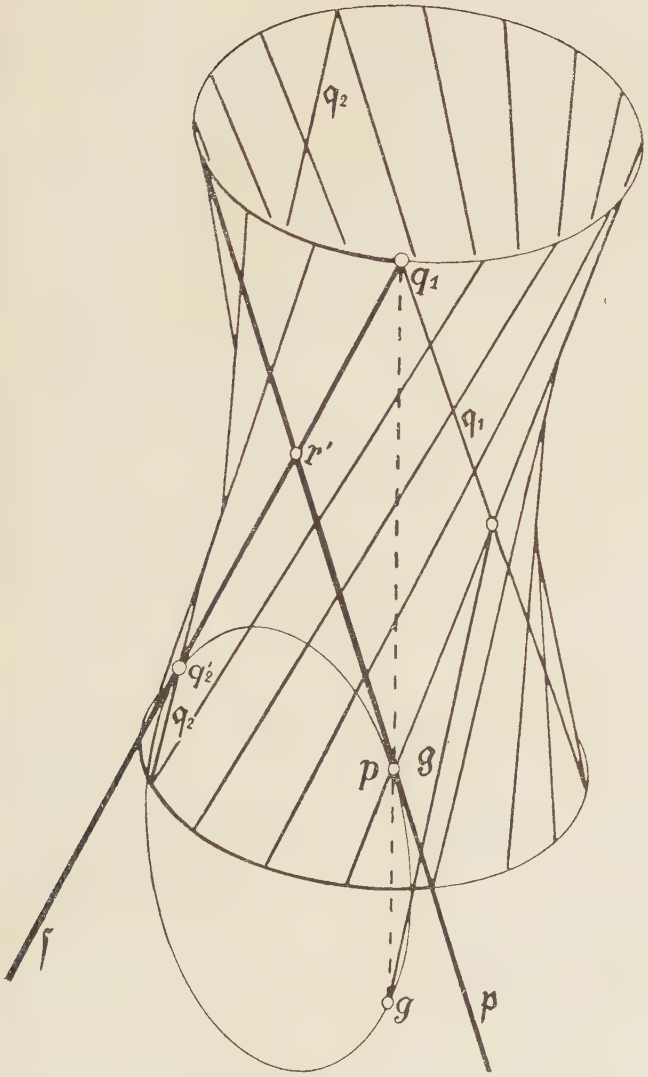

Abbildung 2.

Zur Beschreibung der quadratischen Verwandtschaft v bestimmen wir die Lage des Bildkegelschnittes c des Punktes g. Der Kegelschnitt c läuft durch den Punkt g selbst hindurch, weil g ja auch Spur einer der Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ angehörigen Treffgeraden der Geraden $\mathfrak{g}$ ist. Er läuft auch durch den Punkt q_2' und berührt in ihm die Gerade $\mathfrak{f} = q_1 q_2'$; denn q_2' ist der einzige Punkt der Geraden $\mathfrak{f}$, durch den eine der Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ angehörige Treffgerade der Geraden $\mathfrak{g}$ läuft. Der Kegelschnitt c berührt ferner die Gerade $\mathfrak{p}$, und zwar in ihrem Schnittpunkte p mit der Geraden $g q_1$. Denn es gibt nur eine einzige der Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ angehörige gemeinsame Treffgerade von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{p}$, nämlich die Erzeugende des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ durch den Berührungspunkt der Geraden $\mathfrak{g}$ mit der absoluten Fläche (vgl. Abb. 2). Diese Erzeugende spannt aber mit der Geraden $\mathfrak{g}$ die Tangentialebene der absoluten Fläche in dem Berührungspunkte von $\mathfrak{g}$ auf. Diese Ebene enthält die Leitgerade $\mathfrak{q}_1$, somit auch den Schnittpunkt q_1 der Geraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{f}$. Daher liegen die Punkte g, q_1, p auf einer Geraden, nämlich auf der Spur der Tangentialebene der absoluten Fläche im Berührungspunkt von $\mathfrak{g}$. Also:

Satz 17: Durch die beiden singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ werden die Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene abgebildet, die einem Punkte g allgemeiner Lage einen Kegelschnitt c zuordnet: Der Kegelschnitt c läuft durch den Punkt g selbst hindurch und berührt die Schnittgeraden $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{f}$ der Zeichenebene mit der absoluten Fläche in dem festen Punkte q_2' bzw. in dem mit g variablen Punkte $p = (\mathfrak{p}, g q_1)$.

Wir müssen den Satz noch durch Angabe der singulären Punkte der quadratischen Verwandtschaft v ergänzen: Der Punkt $x = a$ des Kugelraumes liege auf der absoluten Fläche, und zwar auf der Erzeugenden $\mathfrak{a}$ des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$. Ihm wird sowohl durch die Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ als auch durch die Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ der Schnittpunkt p der Erzeugenden $\mathfrak{a}$ mit der Geraden $\mathfrak{p}$ zugeordnet. Rückt x in den Schnittpunkt $a_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{q}_2$ der Erzeugenden $\mathfrak{a}$ mit der Leitgeraden $\mathfrak{q}_2$, so wird $x = a_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{q}_2$ einerseits auf den Punkt p, andererseits

durch die Tangenten der absoluten Fläche im Punkte a_2 aber auf die Punkte der Geraden $p q_2'$ in der Zeichenebene abgebildet. Fällt die Erzeugende $\mathfrak{a}$ mit der ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{f}$ zusammen, so wird $x = s$ jedesmal auf die Punkte der Geraden $\mathfrak{f}$ abgebildet. Einem Punkte $p \neq q_1$ der Geraden $\mathfrak{p}$ entspricht demnach in der quadratischen Verwandtschaft v seine Verbindungsgerade $p q_2'$ doppeltgezählt; jedem Punkte s der Geraden $\mathfrak{f}$, insbesondere dem Punkte $s = r' = \mathfrak{p}\mathfrak{f}$ entspricht die Gerade $\mathfrak{f}$ selbst doppeltgezählt.

Eine besondere Rolle spielt der Punkt q_1: Ein Punkt a_1 der Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ trägt die Büschel von Geraden $\mathfrak{g}$ der Kongruenz $\mathfrak{k}_1$, deren Treffgeraden aus der Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ ∞^1 Reguli und diese wiederum in der Zeichenebene ∞^1 Kegelschnitte c bestimmen, die den Spurpunkten g der $\mathfrak{k}_1$-Geraden $\mathfrak{g}$ durch den Punkt a_1 entsprechen. Im Falle $a_1 = q_1$ schneidet nun jeder der ∞^1 Reguli der $\infty^1 \mathfrak{k}_1$-Geraden $\mathfrak{g}$ durch a_1 je zwei Geraden aus der Zeichenebene aus, und zwar jeder die ausgezeichnete Gerade $\mathfrak{f}$ und eine Gerade $\mathfrak{f}'$ durch q_1 (im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_2$ fällt die zweite Gerade $\mathfrak{f}'$ mit der ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{p}$ zusammen). Dem ausgezeichneten Punkt q_1 entspricht also ein Geradenpaar $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$, bei dem aber die Gerade $\mathfrak{f}'$ unbestimmt wird.

Für die quadratische Verwandtschaft v der Zeichenebene gilt daher:

Punkt g allgemeiner Lage.	Kegelschnitt c durch den Punkt g
Punkt p der Geraden $\mathfrak{p}$.	Gerade $p q_2'$ doppeltgezählt.
Punkt s der Geraden $\mathfrak{f}$.	
a) $s \neq q_1$; insbesondere $s = q_2'$, $s = r'$.	Gerade $\mathfrak{f}$ doppeltgezählt.
b) $s = q_1$.	Geradenpaar $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$; dabei wird $\mathfrak{f}'$ eine unbestimmte Gerade durch q_1.

Aus dieser Gegenüberstellung ergibt sich für die Abbildung der Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene:

Kugelraum.	Zeichenebene.
Punkt x allgemeiner Lage.	Geordnetes Punktepaar von v allgemeiner Lage.
Punkt x der Zeichenebene.	Punkt x doppeltgezählt.
Punkt x der absoluten Fläche auf einer Erzeugenden $\mathfrak{a}$ des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$: $x = a$ liegt nicht auf einer der Geraden $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{f}$.	Punkt p der Geraden $\mathfrak{p}$ doppeltgezählt; p ist der Schnittpunkt der Erzeugenden $\mathfrak{a}$ mit der Geraden $\mathfrak{p}$.
Punkt der Geraden $\mathfrak{q}_1$: $x = a_1$.	Punktepaar p', p; dabei ist p der Schnittpunkt der Erzeugenden von $\mathfrak{h}$ durch a_1 mit der Geraden $\mathfrak{p}$, und p' ist ein unbestimmter Punkt der Geraden $p\,q_1$.
Punkt der Geraden $\mathfrak{q}_2$: $x = a_2$.	Punktepaar p, p'; dabei ist p der Schnittpunkt der Erzeugenden von $\mathfrak{h}$ durch a_2 mit der Geraden $\mathfrak{p}$, und p' ist ein unbestimmter Punkt der Geraden $p\,q_2'$.
Punkt der Geraden $\mathfrak{f}$: $x = s$, insbesondere $x = r'$.	Punktepaar s, s' auf der Geraden $\mathfrak{f}$ wird unbestimmt.
Punkt $x = q_1$.	Punktepaar q_1, s', wobei s' ein unbestimmter Punkt der Geraden $\mathfrak{f}$ wird; bzw. ein unbestimmtes Punktepaar s, s'.
Punkt $x = q_2'$.	Punktepaar s, q_2', wobei s unbestimmt wird; bzw. ein unbestimmtes Punktepaar s, s'.

Schließlich betrachten wir noch die Umkehrung der letzten Abbildung. Dabei entspricht einem geordneten Punktepaar der quadratischen Verwandtschaft v ein Punkt des Kugelraumes; das geordnete Punktepaar bestimmt nämlich aus jeder der Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ je eine Gerade, und diese beiden so bestimmten Geraden schneiden sich in eben dem zugeordneten Punkte.

Dabei treten folgende Singularitäten auf: Das Punktepaar p, p' der quadratischen Verwandtschaft v bestehe aus einem Punkt p der Geraden $\mathfrak{p}$ und einem Punkte p' der Geraden $p\,q_2'$. Dieses Punktepaar bestimmt einmal die durch den Punkt p laufende Er-

zeugende $\mathfrak{a}$ des Regulus $\mathfrak{h} - \mathfrak{a}$ betrachten wir als Gerade der Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ — und das andere Mal die durch den Punkt p_1 laufende Tangente $\mathfrak{a}'$ der absoluten Fläche, die diese im Schnittpunkt $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_2$ der Geraden $\mathfrak{a}$ mit der Leitgeraden $\mathfrak{q}_2$ berührt. Die Gerade $\mathfrak{a}'$ gehört der Kongruenz $\mathfrak{k}_2$ an. Die Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ schneiden sich im Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_2$; dieses ist also der Bildpunkt des geordneten Punktepaares p, p'. Ohne weiteres sieht man jetzt folgendes ein: Jedes der ∞^1 geordneten Punktepaare p, p', wo p ein fester Punkt der Geraden $\mathfrak{p}$ und p' ein variabler Punkt der Geraden pq_2' ist, wird auf den Punkt $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_2$ abgebildet, bzw. im Falle $p' = p$ auf die Erzeugende $\mathfrak{a}$ des Regulus $\mathfrak{h}$ durch den Punkt p.

In analoger Weise entsprechen jedem geordneten Punktepaar s, s' der Geraden $\mathfrak{s} = q_1 q_2'$ alle Punkte dieser Geraden $\mathfrak{s}$; dem Punktepaar p_1, s' entspricht dabei sogar einerseits das Tangentenbüschel der absoluten Fläche im Punkte q_1 der Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ und andererseits die Gerade $\mathfrak{s}$, somit also der Punkt q_1 selbst. Entsprechend wird das Punktepaar s, q_2' auf den Punkt q_2' abgebildet.

Der letzten Tabelle läßt sich dann folgende Tabelle gegenüberstellen:

Zeichenebene.	Kugelraum.
Geordnetes Punktepaar x, x' allgemeiner Lage von v	Punkt allgemeiner Lage
a) $x' \neq x$,	a) er liegt nicht in der Zeichenebene,
b) $x' = x$.	b) er liegt in der Zeichenebene.
Punkt p der Geraden $\mathfrak{p}$ als Doppelpunkt von v.	Die Erzeugende von $\mathfrak{h}$ durch p.
Punktepaar p', p; dabei ist p' ein Punkt der Geraden pq_1.	Punkt $a_1 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{a}$; dabei ist $\mathfrak{a}$ die Erzeugende von $\mathfrak{h}$ durch p.
Punktepaar p, p'; dabei ist p' ein Punkt der Geraden pq_2'.	Punkt $a_2 = \mathfrak{q}_2\mathfrak{a}$; dabei ist $\mathfrak{a}$ die Erzeugende von $\mathfrak{h}$ durch p.
Punktepaar s, s' der Geraden $\mathfrak{s}$; insbesondere: $s, s' = q_1, s'$, $s, s' = s, q_2'$,	Die Erzeugende $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{h}$; Punkt q_1, Punkt q_2'.

§ 11.

Abbildung der Punktepaare einer projektiven Spiegelung der Ebene auf das ebene Punktfeld.

Vermöge der Kleinschen Abbildung ersieht man aus Satz 11, daß die Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung (auf ∞^7 Weisen) auf die Geraden einer singulären linearen Kongruenz umkehrbar eindeutig bezogen werden können. Im vorigen Paragraphen haben wir eine singuläre lineare Kongruenz auf das ebene Punktfeld abgebildet. Wenn wir diese Abbildung der singulären linearen Kongruenz auf die Punkte der Ebene mit ihrer Abbildung auf die Punktepaare der projektiven Spiegelung der Ebene in Verbindung setzen wollen, müssen wir auch die Punktepaare dieser projektiven Spiegelung auf das ebene Punktfeld abbilden.

Um hier auf den richtigen Weg geführt zu werden, betrachten wir zuerst wieder eine gewöhnliche Involution einer Geraden. Wie wir wissen, bilden die Punktepaare dieser Involution ein binäres Gebiet (vgl. S. 17 Z. 11 f). Sie können also auf die Punkte einer Geraden, insbesondere der Trägergeraden selbst, umkehrbar eindeutig abgebildet werden. Zu diesem Zwecke zeichnen wir auf der Geraden einen von den Ruhepunkten ϱ_1, ϱ_2 der Involution verschiedenen Hilfspunkt γ aus und ordnen jedem Punktepaare ξ, ξ' der Involution den vierten harmonischen Punkt ξ^* zu γ in bezug auf eben dieses Punktepaar ξ, ξ' zu. Jeder der beiden Ruhepunkte ϱ_1, ϱ_2 entspricht sich dann selbst. Das Punktepaar, das den Hilfspunkt γ enthält, wird auf γ abgebildet. Diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig: Man gewinnt zu einem vorgegebenen Punkt ξ^* das entsprechende Punktepaar als gemeinsames harmonisches Paar zu den Punktepaaren ϱ_1, ϱ_2 und ξ^*, γ.

Rückt der ausgezeichnete Punkt γ in einen der beiden Ruhepunkte ϱ_1 oder ϱ_2, z. B. in ϱ_1, so wird jedes Punktepaar der Involution in den anderen Ruhepunkt ϱ_2 transformiert; der Doppelpunkt ϱ_1 entspricht keinem bestimmten Punkt.

Um ein entsprechendes Abbildungsverfahren für die Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung zu gewinnen, zeichnen wir auf jeder Geraden durch das Zentrum der Spiegelung einen Hilfspunkt aus. Am einfachsten wählen wir als Ort dieser Punkte eine Hilfsgerade h, die nicht mit der Achse a der projektiven Spiegelung zusammenfällt und nicht durch das Zentrum z läuft. Wieder soll dann jedem Punktepaar x, x' der Spiegelung als Bildpunkt der vierte harmonische Punkt x^* zum Schnittpunkt g seiner Trägergeraden mit der Hilfsgeraden h in bezug auf das Punktepaar selbst zugeordnet werden.

Das Zentrum z der Spiegelung sowie jeder Punkt der Achse a entsprechen sich dabei als Doppelpunkte der Spiegelung selbst.

Im Gegensatz zu dem regulären binären Fall ist diese Abbildung der Punktepaare der ebenen projektiven Spiegelung auf das ebene Punktfeld nicht mehr singularitätenfrei. Denn es ist klar, daß dabei die Verbindungslinie t des Zentrums z mit dem Schnittpunkt r der Hilfsgeraden h und der Achse a ausgezeichnet wird: Alle Punktepaare der auf ihr liegenden Involution werden auf das Zentrum z abgebildet; mit Ausnahme des Punktes $r = ah$, ihm entspricht ein beliebiger Punkt der Geraden $t = rz$. In der Umkehrung entspricht dem Zentrum z jedes Punktepaar der Geraden t und jedem von z verschiedenen Punkt der Geraden t der Doppelpunkt r.

Durch die projektive Spiegelung werden nun aber nicht nur die Punkte, sondern auch die Geraden der Ebene gepaart (vgl. S. 18). Wie werden die ∞^1 Punktepaare eines Geradenpaares u, u' der Spiegelung abgebildet? Durch die Abbildung der Punktepaare x, x' des Geradenpaares u, u' werden die beiden Strahlenbüschel in dem Zentrum z und dem Punkte r projektiv aufeinander bezogen: Einem Strahl $zx = zx'$ des ersten Büschels entspricht in dem anderen Büschel der vierte harmonische Strahl rx^* zu h in bezug auf das Strahlenpaar rx, rx'. Die sich entsprechenden Strahlen schneiden sich in dem Bildpunkte x^* des Punktepaares x, x'. Das Erzeugnis der beiden projektiven Strahlenbüschel ist aber ein Kegelschnitt. Ein Geradenpaar u, u' der projektiven Spiegelung wird also auf einen Kegelschnitt abgebildet.

Wir untersuchen jetzt die Lage des Bildkegelschnittes des Geradenpaares u, u'. Wir setzen dabei voraus, daß die Gerade u — und damit auch u' — nicht durch den Punkt r läuft. Der vom Punkte r verschiedene Scheitel s_1 des Geradenpaares u, u' liegt auf der Achse a und wird als Doppelpunkt der projektiven Spiegelung auf sich selbst abgebildet. Der Kegelschnitt hat mit der Achse a aber nur diesen Punkt gemeinsam, er berührt im Punkte s_1 die Achse a; die Punkte der Achse entsprechen sich nämlich als Doppelpunkte der Spiegelung umkehrbar eindeutig selbst.

Das Punktepaar o, o', welches die Gerade t aus dem Geradenpaar u, u' ausschneidet, wird auf das Zentrum z abgebildet. Der Kegelschnitt berührt daher auch die Gerade t, und zwar im Punkte z; denn jeder andere Punkt von t kann nur Bild des Doppelpunktes r sein, und diesen enthält das Geradenpaar u, u' nach Voraussetzung nicht.

Weiter läuft der Kegelschnitt durch den Schnittpunkt s_2 der Geraden u und h; denn ein Punkt (s_2) der Hilfsgeraden h wird mit seinem konjugierten Punkt (s_2') auf sich selbst abgebildet. Das Geradenpaar rs_2', $rs_2 = h$ gehört offenbar der projektiven Spiegelung an. Das Punktepaar s_3, s_3', welches es aus dem Geradenpaar u, u' ausschneidet, gehört dann auch der projektiven Spiegelung an. Dieses wird nun, weil es einen Punkt, nämlich s_3', der Hilfsgeraden h enthält, in den Punkt s_3' transformiert. Der Kegelschnitt läuft daher auch noch durch den Schnittpunkt s_3' der Geraden u' und h. Also:

Satz 18: Bei der Abbildung der Punktepaare einer ebenen projektiven Spiegelung mit dem Zentrum z und der Achse a vermöge der Hilfsgeraden h entspricht einem Geradenpaar u, u' der projektiven Spiegelung im allgemeinen (s. u.) ein Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt berührt die Gerade $t = (ah, z)$ im Zentrum z und die Achse a im Scheitel $s_1 = uu'$ und läuft durch die Schnittpunkte der Geraden u, u' mit der Hilfsgeraden h.

Singuläre Fälle: Eine Gerade u durch das Zentrum z entspricht sich in der Spiegelung selbst. Für eine solche (Doppel-)Gerade läuft unsere Abbildung auf die eingangs erwähnte Abbildung der Punkte-

paare einer Involution auf die Punkte der Trägergeraden hinaus. Insbesondere entspricht der Doppelgeraden $t = rz$ das Zentrum.

Die Achse a wird als Doppelgerade der Spiegelung auf sich selbst abgebildet, da ihre Punkte als Doppelpunkte sich selbst entsprechen; nur der Bildpunkt des Doppelpunktes $r = ah$ wird unbestimmt.

Einem Geradenpaar u, u', dessen Scheitel uu' in den singulären Punkt r fällt, entspricht die zu der Hilfsgeraden h in bezug auf das Geradenpaar u, u' vierte harmonische Gerade in dem Büschel des Punktes r; das Geradenpaar, welches die Hilfsgerade h enthält, wird demnach auf die Hilfsgerade h selbst abgebildet.

§ 12.

Abbildung der Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J des Linienraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft V der Zeichenebene (synthetisch).

Nach Satz 7 werden zwei verschiedene Nullgeraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des Linienraumes, die sich in der windschiefen Involution J an den Achsen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ entsprechen, auf zwei Punktepaare X, X' und Y, Y' der Korrelation K der „Zeichenebene" des Linienraumes derart abgebildet, daß die Punktepaare X, Y und X', Y' den projektiven Spiegelungen P_1 bzw. P_2 angehören. Die Punkte des Kugelraumes werden dagegen nach § 10 auf die geordneten Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft v des Satzes 17 abgebildet. In diesem Paragraphen wollen wir nun einen Übergang von der Korrelation K bzw. den projektiven Spiegelungen P_1, P_2 zu der quadratischen Verwandtschaft v herstellen.

Einem Punktepaar X, Y der projektiven Spiegelung P_1 entspricht in der Korrelation K ein Geradenpaar $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ der projektiven Spiegelung P_2. Wir wenden nun die in dem vorigen Paragraphen beschriebene Abbildung der Punktepaare einer projektiven Spiegelung auf das ebene Punktfeld sowohl auf die projektive Spiegelung

P_1 als auch auf die projektive Spiegelung P_2 an; die ausgezeichnete Gerade $\mathfrak{N}_1$ der Zeichenebene sei jedesmal Hilfsgerade dabei. Das Punktepaar X, Y der Spiegelung P_1 wird dann durch eine Abbildung T_1 (des § 11) auf einen Punkt X^* und das Geradenpaar $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ der Spiegelung P_2 durch eine andere Abbildung T_2 (des § 11) nach Satz 18 auf einen Kegelschnitt C abgebildet. So entsteht in der Zeichenebene eine quadratische Verwandtschaft V, die einem Punkte X^* einen Kegelschnitt C zuordnet. Dieser Kegelschnitt C berührt nach Satz 18 die Gerade $Q_1 Q_2'$ im Punkte Q_2' und die Achse $\mathfrak{P}$ im Doppelpunkt $P = \mathfrak{U}'\mathfrak{V}'$ und läuft durch die Schnittpunkte $G_{\mathfrak{U}'}$, $G_{\mathfrak{V}'}$, der Geraden $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ mit der Geraden $\mathfrak{N}_1$.

Um zu beweisen, daß diese quadratische Verwandtschaft V der Zeichenebene mit der im § 10 beschriebenen quadratischen Verwandtschaft v des Satzes 17 übereinstimmt, muß noch gezeigt werden, daß der Kegelschnitt C des Punktes X^* durch den Punkt X^* selbst hindurchläuft: R_1 sei der Schnittpunkt der Geraden XY und $\mathfrak{N}_1$. Dann ist X, Y; R_1, X^* ein harmonisches Punktquadrupel. Dieses projizieren wir vom Punkte Q'_2 aus auf die Gerade $\mathfrak{N}_1$ und erhalten das harmonische Punktquadrupel $G_{\mathfrak{U}'}$, $G_{\mathfrak{V}'}$; R_1, R_2. Die Projektion hiervon vom Punkte $P = \mathfrak{U}'\mathfrak{V}'$ aus auf die Verbindungsgerade $Q'_2 X^*$ der Punkte Q'_2 und X^* liefert das harmonische Punktquadrupel X'', Y''; R_2, X^*. Die Projektionsstrahlen $PG_{\mathfrak{U}'}$, $PG_{\mathfrak{V}'}$ fallen aber mit den Geraden $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ zusammen, da die Punkte X, Y und die Geraden $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ sich in der Korrelation K entsprechen; das Punktepaar X'', Y'' liegt also auf dem Geradenpaar $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ und gehört der projektiven Spiegelung P_2 an, da seine Verbindungsgerade $X''Y''$ durch das Zentrum Q_2' (nach Konstruktion) läuft. Das Punktepaar X'', Y'' wird dann bei der Abbildung T_2 auf den Punkt $X''^* = X^*$ abgebildet. Der Kegelschnitt C des Punktes X^* läuft also durch den Punkt X^* selbst hindurch. Unsere quadratische Verwandtschaft V der Zeichenebene stimmt daher mit der quadratischen Verwandtschaft v des Satzes 17 überein.

Somit ist mit Hilfe der Abbildung der Punktepaare einer projektiven Spiegelung auf das ebene Punktfeld (vgl. § 11), angewandt sowohl auf die projektive Spiegelung P_1 als auch auf P_2, ein Über-

gang von der Korrelation K zu der quadratischen Verwandtschaft $V = v$ und umgekehrt gefunden. Das Ergebnis lautet:

Satz 19: Bildet man die geordneten Punktepaare der projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 mit Hilfe der Abbildung des § 11 auf das Punktfeld der Zeichenebene ab, so entsteht aus der Korrelation K eine quadratische Verwandtschaft V, die einem Punkte X^* einen durch X^* hindurchlaufenden Kegelschnitt C zuordnet. Die quadratische Verwandtschaft V stimmt mit der quadratischen Verwandtschaft v des Satzes 17 überein.

Damit ist die in der Einleitung zum II. Teile formulierte Hauptaufgabe gelöst. Aus den Sätzen 7 und 19 folgt sofort:

Satz 20: Die Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J werden mit Hilfe der Abbildung des § 11 auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft $V = v$ abgebildet.

Nun identifizieren wir den Kugelraum mit dem Linienraum, und zwar derart, daß zwei Punkte x, X des Kugel- bzw. Linienraumes, insbesondere die „Zeichenebenen" der beiden Räume und deren ausgezeichnete Elemente q_1, q_2', $\mathfrak{p}$ bzw. Q_1, Q_2', $\mathfrak{P}$ zusammenfallen. Dann lassen sich also sowohl die Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J des Linienraumes als auch die Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft $V = v$ der Zeichenebene abbilden. Durch Zusammensetzung dieser beiden Abbildungen, genauer der ersten Abbildung mit der Umkehrung der zweiten, ist dann die im I. Teil beschriebene Nicht-Euklidische Geraden-Kugel-Transformation hergestellt, und zwar ohne den Umweg über den R_5. Denn ein Punktepaar allgemeiner Lage der windschiefen Involution J wird dabei als Ort von Nullgeradenpaaren von J nacheinander abgebildet auf zwei Geradenpaare $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ und $\bar{\mathfrak{G}}_1$, $\bar{\mathfrak{G}}_2$ mit demselben Scheitel O auf $\mathfrak{P}$ (vgl. § 4), dann auf ein Paar Kegelschnitte, die beide durch den Scheitel O laufen und die derart aufeinander bezogen sind, daß zugeordnete Punkte ein Punktepaar der quadratischen Verwandtschaft $V = v$ bilden (vgl. die Sätze 18 und 20) und schließlich auf eine Tangente der absoluten Fläche mit Ausnahme des Berührungspunktes (vgl. § 10). Dem Doppelpunkt O der quadratischen Verwandtschaft v

entspricht nämlich die Erzeugende des ausgezeichneten Regulus $\mathfrak{h}$ durch O und durch den Berührungspunkt (vgl. die Tabelle auf S. 33). Aus Stetigkeitsgründen ordnen wir aber dem Doppelpunkt O den Berührungspunkt der entsprechenden Tangente zu (vgl. Satz 16). Einem Punktepaare der windschiefen Involution J entspricht daher eine Tangente der absoluten Fläche. Somit ist das Hauptresultat des II. Teiles gewonnen. Es lautet:

Satz 21: Durch Zusammensetzung der Abbildung der Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J an den zueinander nullpolaren Geraden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ *auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft* $V = v$ *der Zeichenebene (nach Satz 20) mit der (Umkehrung der) Abbildung der Punkte des Raumes auf dieselben geordneten Punktepaare (nach Satz 17) entsteht die Nicht-Euklidische Geraden-Kugel-Transformation.*

III. Teil.

Analytische Behandlung der Konstruktion.

In diesem letzten Teil unserer Arbeit sollen die Resultate des II. Teiles auch noch analytisch abgeleitet werden; zuerst das Resultat des § 10, dann das Resultat des § 12.

§ 13.

Abbildung der Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft v der Zeichenebene (analytisch).

Die Fläche 2. Ordnung f^2 mit der Gleichung

(1) $$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$$

sei im Kugelraum als absolute Fläche zugrunde gelegt. Als Zeichenebene wählen wir die Tangentialebene

(2) $$x_0 = 0$$

der absoluten Fläche. Sie schneidet die absolute Fläche in dem Geradenpaare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}$:

(3) $$x_0 = 0, \quad x_1 = 0; \qquad x_0 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Die beiden singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ werden durch die Wahl ihrer Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ bestimmt. Diese seien die beiden durch die bezüglich der absoluten Fläche zueinander konjugierten Flächenpunkte

(4) $$1:0:1:0; \qquad 0:1:0:1$$

und

(5) $$0:1:0:0; \qquad 1:0:0:0$$

laufenden Erzeugenden der absoluten Fläche. Ihre Plückerschen Koordinaten lauten

$$\mathfrak{q}_1 = 1:0:1:1:0:-1, \tag{6}$$

$$\mathfrak{q}_2 = 1:0:0:0:0:\ \ 0 \tag{7}$$

und die singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ besitzen die Parameterdarstellungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{x}_{01} = x_1 x_2, & \mathfrak{x}_{23} = x_1 x_2, \\ \mathfrak{x}_{02} = x_2^{\,2}, & \mathfrak{x}_{31} = -(x_3 - x_1)^2, \\ \mathfrak{x}_{03} = x_2 x_3, & \mathfrak{x}_{12} = x_2 (x_3 - 2x_1) \end{array}\right. \tag{8}$$

bzw.

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{y}_{01} = y_1 y_2, & \mathfrak{y}_{23} = \ \ 0, \\ \mathfrak{y}_{02} = y_2^{\,2}, & \mathfrak{y}_{31} = -y_3^{\,2}, \\ \mathfrak{y}_{03} = y_2 y_3, & \mathfrak{y}_{12} = \ \ y_2 y_3. \end{array}\right. \tag{9}$$

Durch jeden Punkt des Raumes, der nicht auf einer der beiden Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ liegt, läuft genau eine Gerade $\mathfrak{x}$ der linearen Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ und eine Gerade $\mathfrak{y}$ der linearen Kongruenz $\mathfrak{k}_2$. Dieses Geradenpaar $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ schneidet aus der Zeichenebene (2) $x_0 = 0$ das Punktepaar

$$x = x_1 : x_2 : x_3; \qquad y = y_1 : y_2 : y_3 \tag{10}$$

aus. So wird ein jeder Punkt des Kugelraumes durch die beiden mit ihm inzidenten Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ der linearen Kongruenz $\mathfrak{k}_1$ bzw. $\mathfrak{k}_2$ im allgemeinen Falle umkehrbar eindeutig auf ein geordnetes Punktepaar der Zeichenebene abgebildet.

Der allgemeine Fall liegt vor, wenn der Punkt des Kugelraumes weder auf einer der Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ noch auf den Kongruenzgeraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in der Zeichenebene liegt. In dem besonderen Falle wird ihm kein bestimmtes Punktepaar der Zeichenebene zugeordnet.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Punkten x und y eines solchen geordneten Punktepaares x, y läßt sich leicht angeben. Denn die Bedingung dafür, daß sich zwei Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ der singulären Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ schneiden, lautet:

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) \equiv \{(x_3 - x_1) y_2 - x_2 y_3\}^2 - x_1 x_2 y_1 y_2 = 0. \tag{11}$$

Diese Bedingung gibt nun aber auch den Zusammenhang zwischen den Punkten x und y des Bildpunktepaares eines Punktes des Kugelraumes an: Die Punkte x und y sind bezüglich der quadratischen Verwandtschaft konjugiert, die durch die Gleichung (11) in der Zeichenebene $x_0 = 0$ bestimmt wird. Einem festen Punkte x der Zeichenebene entsprechen in dieser Verwandtschaft die Punkte y des Kegelschnittes c (11), die mit dem Punkte x ∞^1 Paare konjugierter Punkte bilden. Diese sind die Bildpunktepaare der Punkte der Geraden $\mathfrak{x}$ durch den Punkt x der Zeichenebene.

Über die Lage des Kegelschnittes c eines Punktes x der Zeichenebene läßt sich folgendes aussagen:

1. Der Kegelschnitt c läuft durch seinen Originalpunkt x hindurch. Denn:

$$\{(x_3 - x_1)x_2 - x_2 x_3\}^2 - x_1 x_2 x_1 x_2 = 0. \tag{12}$$

2. Die Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ treffen die Zeichenebene $x_0 = 0$ in den Punkten q_1 bzw. q_2':

$$q_1 = 1:0:1; \quad q_2' = 1:0:0. \tag{13}$$

Der Kegelschnitt c des Punktes x berührt die Verbindungslinie $\mathfrak{f} = q_1 q_2' = 0:1:0$ dieser Punkte im Punkte q_2'.

3. Die Verbindungsgerade $x q_1$ des Punktes x mit dem Punkte q_1:

$$x q_1 = x_2 : x_3 - x_1 : -x_2 \tag{14}$$

schneidet die Gerade $\mathfrak{p} = 1:0:0$ in dem Punkte p:

$$p = 0 : x_2 : x_3 - x_1. \tag{15}$$

Der Punkt p liegt aber auf dem Kegelschnitt c des Punktes x:

$$\{x_2(x_3 - x_1) - (x_3 - x_1)x_2\}^2 = 0; \tag{16}$$

und zwar berührt der Kegelschnitt c die Gerade $\mathfrak{p}$ in dem Schnittpunkte p der Geraden $\mathfrak{p}$ und der Verbindungsgeraden $x q_1$ der Punkte x, q_1.

Das Ergebnis dieses Paragraphen lautet dann:

Satz 22: Die Punkte des Kugelraumes werden durch die beiden singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ (8) und $\mathfrak{k}_2$ (9) auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft (11) der Zeichen-

ebene, d. h. der Tangentialebene (2) der absoluten Fläche (1) im allgemeinen umkehrbar eindeutig abgebildet. In der quadratischen Verwandtschaft (11) entspricht einem Punkte x der Zeichenebene (2) der Kegelschnitt (11). Dieser läuft durch den Punkt x und berührt die Gerade $\mathfrak{f} = q_1 q_2' = 0:1:0$ im Punkte $q_2' = 1:0:0$ und die Gerade $\mathfrak{p} = 1:0:0$ im Punkte $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, x q_1)$.

Die Behandlung der singulären Fälle bei der Abbildung der Punkte des Kugelraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft (11) erübrigt sich hier (vgl. dazu § 10).

Schließlich wollen wir die Abbildung für einen Punkt x des Kugelraumes wirklich durchführen und die Koordinaten seiner beiden Bildpunkte in der Zeichenebene angeben: Man verbindet den abzubildenden Punkt x mit den Polen der beiden Ebenen, die x mit den Leitgeraden $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ aufspannt, durch zwei Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$. Diese Verbindungsgeraden besitzen die Plückerschen Koordinaten

$$(17)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_{01} = x_0 x_3 - x_1 x_2, & \mathfrak{x}_{23} = x_0 x_3 - x_1 x_2, \\ \mathfrak{x}_{02} = -(x_0 - x_2)^2, & \mathfrak{x}_{31} = (x_3 - x_1)^2, \\ \mathfrak{x}_{03} = x_0 (2x_3 - x_1) - x_2 x_3, & \mathfrak{x}_{12} = x_2 (2x_1 - x_3) - x_0 x_1 \end{cases}$$

und

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_{01}' = x_0 x_3 - x_1 x_2, & \mathfrak{x}_{23}' = 0, \\ \mathfrak{x}_{02}' = -x_2^2, & \mathfrak{x}_{31}' = x_3^2, \\ \mathfrak{x}_{03}' = -x_2 x_3, & \mathfrak{x}_{12}' = -x_2 x_3. \end{cases}$$

Sie sind die beiden Geraden aus den singulären linearen Kongruenzen $\mathfrak{k}_1$ (8) bzw. $\mathfrak{k}_2$ (9) durch den Punkt x und schneiden daher aus der Zeichenebene $x_0 = 0$ das der quadratischen Verwandtschaft (11) angehörige Bildpunktepaar x^*, x'^* des Punktes x aus:

$$(19)\quad x^* = 0 : x_0 x_3 - x_1 x_2 : -(x_0 - x_2)^2 : x_0 (2x_3 - x_1) - x_2 x_3,$$

$$(20)\quad x'^* = 0 : x_0 x_3 - x_1 x_2 : -x_2^2 \qquad : -x_2 x_3.$$

§ 14.

Abbildung der Nullgeradenpaare der windschiefen Involution J des Linienraumes auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft V der Zeichenebene (analytisch).

Bei der analytischen Ableitung des Resulatets von Satz 20 gehen wir von dem regulären linearen Geradenkomplex

(21) $$\mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{12} = 0$$

als Grundkomplex im Linienraum aus. Ihn bilden wir nach § 1 auf die beiden Ebenen E_1, E_2 mit den Gleichungen

(22) $$X_0 = 0; \quad X_1 = 0$$

ab. Die dabei gewonnene Figur projizieren wir von dem Punkte $Z = 1:1:0:0$ aus auf die als „Zeichenebene" gewählte Ebene $E_1 : X_0 = 0$ (vgl. Abb. 1).
In dem Nullsystem

(23) $$U_0' = -X_1, \quad U_1' = X_0 - X_2, \quad U_2' = X_1 - X_3, \quad U_3' = X_2$$

des Grundkomplexes entsprechen sich folgende Punkte und Ebenen:

(24) $$\begin{cases} Q_1 = 0:1:0:1 & \text{und} \quad E_1 = 1:0:0:0, \\ Q_2 = 1:0:0:0 & \text{und} \quad E_2 = 0:1:0:0, \\ Z = 1:1:0:0 & \text{und} \quad N = -1:1:1:0, \end{cases}$$

sowie die Schnittgerade $\mathfrak{P} = E_1 E_2$ der beiden Ebenen E_1, E_2 und die Verbindungsgerade $\mathfrak{Q} = Q_1 Q_2$ der Nullpunkte Q_1, Q_2 dieser Ebenen. Die Nullebene N des Projektionszentrums Z schneidet die Ebenen E_1 und E_2 in den Geraden $\mathfrak{N}_1$ bzw. $\mathfrak{N}_2$ mit den Gleichungen:

(25) $$X_0 = 0, \quad X_1 + X_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad X_0 = 0, \quad -X_0 + X_2 = 0.$$

Die Projektion der beiden Ebenen E_1 und E_2 vom Punkte Z aus auf die Zeichenebene E_1 liefert dann folgende ausgezeichnete Punkte und Geraden:

(26) $$Q_1 = 1:0:1, \qquad Q_2' = 1:0:0,$$

(27) $$\mathfrak{P} = 1:0:0, \qquad \mathfrak{N}_1 = 1:1:0.$$

Die Verbindungsgerade $\gamma = Q_1 Q_2' = 0:1:0$ der ausgezeichneten Punkte Q_1 und Q_2' läuft durch den Schnittpunkt $R' = \mathfrak{P}\mathfrak{N}_1 = 0:0:1$ der ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}_1$.

In der Abbildung des § 3 wird der Grundkomplex also auf die geordneten Punktepaare der biachsialen Korrelation K mit den Achsen $\mathfrak{P}, \mathfrak{N}_1$ (27) und den Zentren Q_1, Q_2' (26) in der Zeichenebene abgebildet. Nach § 2 (10) lautet diese biachsiale Korrelation K:

(28) $$\mathfrak{U}_1' = X_1, \quad \mathfrak{U}_2' = X_1 - X_3, \quad \mathfrak{U}_3' = X_2$$

und hat daher die Gleichung:

(29) $$X_1 Y_1 + (X_1 - X_3) Y_2 + X_2 Y_3 = 0.$$

Die Zentren Q_1 und Q_2' bestimmen mit der Achse $\mathfrak{P}$ zusammen die projektiven Spiegelungen P_1 und P_2 mit den Abbildungsformeln

(30) $$Y_1 = -X_1, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3 - 2X_1$$

und

(31) $$Y_1' = -X_1', \quad Y_2' = X_2', \quad Y_3' = X_3'.$$

Auf diese beiden projektiven Spiegelungen wenden wir die im § 11 beschriebene Abbildung an und bilden sowohl die Punktepaare X, Y der Spiegelung P_1 (30) als auch die Punktepaare X', Y' der Spiegelung P_2 (31) auf das Punktfeld der Zeichenebene ab; als Hilfsgerade benutzen wir dabei jedesmal die Achse $\mathfrak{N}_1$ (27).

Zunächst für die Spiegelung P_1: Die Verbindungsgerade $X Q_1$ eines Punktes X allgemeiner Lage mit dem Zentrum Q_1 habe die Parameterdarstellung

(32) $$\xi_1 X_1 + \xi_2 : \xi_1 X_2 : \xi_1 X_3 + \xi_2.$$

Der den Punkt X in der Spiegelung P_1 entsprechende Punkt Y liegt auf dieser Geraden und hat den binären Parameter $\eta_1 : \eta_2 = -1 : 2X_1$. Der Schnittpunkt G der Geraden $X Q_1$ mit der Hilfsgeraden $\mathfrak{N}_1$ hat den Parameter $\gamma_1 : \gamma_2 = -1 : X_1 + X_2$. Dem Punktepaare $X, Y = \xi, \eta$ wird nun der vierte harmonische Punkt $X^* = \xi^*$ des Punktes $G = \gamma$ in bezug auf das Punktepaar zugeordnet, und dieser besitzt den binären Parameter $\xi_1^* : \xi_2^* = -X_2 : X_1 + X_1 X_2$. Der Bildpunkt X^* des Punktepaares X, Y hat demnach die Koordinaten:

(33) $$X_1^* = X_1^2, \quad X_2^* = -X_2^2, \quad X_3^* = X_1^2 - X_2 (X_3 - X_1).$$

Die bei der synthetischen Behandlung in § 11 schon aufgezählten Singularitäten dieser Abbildung ergeben sich ohne weiteres aus diesen Abbildungsformeln.

Analog hierzu läßt sich die analytische Fassung der Abbildung des § 11 für die projektive Spiegelung P_2 (31) ableiten. So ergeben sich für die Punktepaare X, Y der projektiven Spiegelung P_1 (30) bzw. für die Punktepaare X', Y' der projektiven Spiegelung P_2 (31) folgende Abbildungsformeln:

$$(34) \qquad X, Y \to X^* = X_1^2 : -X_2^2 : X_1^2 + X_2(X_1 - X_3),$$

$$(35) \qquad X', Y' \to X'^* = X_1'^2 : -X_2'^2 : -X_2' X_3'.$$

Es ist nun zu untersuchen, in welchem Zusammenhang die Punkte X^* und X'^* stehen müssen, damit die zugehörigen Punktepaare X, Y und X', Y' von P_1 bzw. P_2 ein Bildpunktquadrupel eines Geradenpaares der windschiefen Involution J bilden. Wir behaupten, daß dieser Zusammenhang durch die quadratische Verwandtschaft (11) gegeben ist. In der Tat: Wir identifizieren den Kugel- und den Linienraum miteinander, und zwar derart, daß zwei Punkte x, X, deren Koordinaten x_i, X_i übereinstimmen, insbesondere also die „Zeichenebenen" der beiden Räume und deren ausgezeichnete Elemente zusammenfallen. Dann sind nach den Formeln (34), (35) die in bezug auf die quadratische Verwandtschaft (11) konjugierten Punkte x^*, $x'^* = X^*$, X'^* von (19), (20) des Bildpunktepaares des Punktes x des Kugelraumes die Bilder des Punktepaares X, Y:

$$(36) \quad \begin{cases} X = X_1 : X_2 : X_3 = +\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} : x_0 - x_2 : x_1 - x_3 + \sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2}, \\ Y = Y_1 : Y_2 : Y_3 = -\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} : x_0 - x_2 : x_1 - x_3 - \sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} \end{cases}$$

der projektiven Spiegelung P_1 (30) bzw. des Punktepaares X', Y':

$$(37) \quad \begin{cases} X' = X_1' : X_2' : X_3' = -\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} : x_2 : x_3, \\ Y' = Y_1' : Y_2' : Y_3' = +\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} : x_2 : x_3 \end{cases}$$

der projektiven Spiegelung P_2 (31). Die Punkte X und X' sowie die Punkte Y und Y' von (36), (37) sind aber in bezug auf die biachsiale Korrelation K mit der Gleichung (29) konjugiert. Deshalb und weil X, Y und X', Y' den projektiven Spiegelungen P_1 bzw. P_2 angehören, stellen die Punktepaare X, X' und Y, Y' nach Satz 7

die Bilder zweier Nullgeradenpaare $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ der windschiefen Involution J dar. Dem Satz 22 läßt sich jetzt der folgende Satz gegenüberstellen:

Satz 23: Die Geradenpaare des Grundkomplexes (21), die sich in der windschiefen Involution J entsprechen, lassen sich vermöge der Abbildungen (34), (35) der projektiven Spiegelungen P_1 (30) bzw. P_2 (31) auf die geordneten Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft (11) der Zeichenebene abbilden.

Zu einem Punkte x des Kugelraumes erhält man also die Bildgeraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des Linienraumes, indem man den Punkt x auf das Punktepaar x^*, $x'^* = X^*$, X'^* (von (19), (20)) der quadratischen Verwandtschaft (11) und dieses vermöge der Transformationen (34) bzw. (35) auf das Punktquadrupel X, Y, X', Y' von (36), (37) der Zeichenebene abbildet und die Punkte X', Y' vom Projektionszentrum $Z = 1:1:0:0$ aus auf die Ebene $E_1 = 0:1:0:0$ projiziert; die Verbindung der beiden Projektionspunkte mit den Punkten X bzw. Y liefert dann die Bildgeraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$. Diese haben demnach die Plückerschen Koordinaten:

$$(38)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{Y}_{01} = \pm\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2}, & \mathfrak{X}_{23}, \mathfrak{Y}_{23} = \pm\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} + x_2, \\ \mathfrak{X}_{02}, \mathfrak{Y}_{02} = x_0 - x_2, & \mathfrak{X}_{31}, \mathfrak{Y}_{31} = x_3, \\ \mathfrak{X}_{03}, \mathfrak{Y}_{03} = \pm\sqrt{x_0 x_3 - x_1 x_2} + x_1 - x_3, & \mathfrak{X}_{12}, \mathfrak{Y}_{12} = -x_2. \end{cases}$$

Schließlich geben wir noch die Abbildungsformeln an, die einen Punkt X bzw. ein Punktepaar X, X' der Involution J des Linienraumes als Ort von Nullgeraden in eine Minimalgerade $\mathfrak{m}$ des Kugelraumes transformieren. Sie ergeben sich aus den vier Bedingungen, denen die Koordinaten der Nullgeraden $\mathfrak{X}$ (38) bzw. die Koordinaten x_i ihres Ursprungspunktes x im Kugelraum genügen müssen, wenn die Gerade $\mathfrak{X}$ durch den festen Punkt X des Linienraumes laufen soll:

$$(39)\quad \begin{cases} \mathfrak{m}_{01} = (X_0 - X_1)^2, & \mathfrak{m}_{23} = X_1^2, \\ \mathfrak{m}_{02} = -X_2^2, & \mathfrak{m}_{31} = (X_3 - X_1)^2, \\ \mathfrak{m}_{03} = -X_1(X_0 - X_1) - X_2(X_3 - X_1), & \mathfrak{m}_{12} = X_1(X_0 - X_1) - X_2(X_3 - X_1). \end{cases}$$

Lebenslauf.

Ich, Helmut Schröder, katholischen Bekenntnisses, wurde am 10. Mai 1911 zu Hagen i. W. als Sohn des Lokomotivführers Engelbert Schröder und seiner Ehefrau Therese geb. Bütermann geboren. Ich besuchte die Grundschule und von 1921 ab das Staatliche Albrecht Dürer-Realgymnasium zu Hagen; Ostern 1930 legte ich dort die Reifeprüfung ab. Dann studierte ich Mathematik, Geographie und Physik zunächst zwei Semester in Köln, darauf in Bonn. Am 8. November 1935 bestand ich in Bonn die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Ostern 1936 trat ich in den höheren Schuldienst ein und bin seitdem als Studienreferendar an der Städtischen Oberrealschule zu Hagen. Die Doktorprüfung fand am 12. Februar 1937 statt.

Herrn Professor E. A. Weiss danke ich für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für die Unterstützung bei ihrer Anfertigung.